Лекция 1.

Этот курс посвящен возникновению универсального поведения в случайных, на первый взгляд не связанных между собой многокомпонентных случайных системах. Мы будем рассматривать широкий класс многомерных случайных величин и случайных процессов, которые задаются простыми локальными правилами, а также могут обладать глобальными симметриями. Оказывается, что возникающие при этом вероятностные распределения, если посмотреть на них в правильно выбранных естественных единицах измерения, демонстрируют удивительно схожее "универсальное" поведение. А именно, когда число степеней свободы в рассматриваемых системах велико, при соответствующем скейлинге (перемасштабировании) возникающие наборы случайных величин демонстрируют свойство "концентрации", т. е. ведут себя как детерминистические (неслучайные объекты). Случайные отклонения от этой неслучайной предельной формы, "флуктуации", измеренные на характерном "флуктуационном" масштабе, описываются небольшим набором универсальных вероятностных распределений, функциональный вид которых зависит только от глобальных симметрий и не зависит от "микроподробностей" исходной задачи.

Следует отметить, что второе утверждение во многих случаях имеет статус гипотезы, подтверждаемой численными и реальными экспериментами. Получение точного аналитического вида универсальных распределений - это задача, которую можно решить аналитически лишь в случае систем со специальной математической структурой, обеспечивающей наличие большого количества симметрий и тесно связанной с понятием интегрируемости.

1. Краткие сведения из теории вероятностей:

Сходимости сл. вел.; З. Б. Ч. и Ц. П. Т.

Утверждения о концентрации вероятностных распределений и существовании универсального распределения флуктуаций хорошо известны в теории вероятности как З.Б.Ч. и Ц.П.Т. Чтобы напомнить как они формулируются напомним как определяется понятие сходимости последовательности случайных величин в теории вероятности. В отличие от обычного анализа в т.в. существует несколько различных вариантов сходимости.

Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность сл. в.

1) Сходимость почти наверное (П.Н.):

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \iff \mathbb{P}(\xi_n \to \xi) = 1$$

2) Сходимость по вероятности ($\mathbb{P}$):

$$\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi \iff \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

3) Сходимость по распределению:
(Слабая сходимость)

1. $F_n(x) := \mathbb{P}(\xi_n < x)$ $\quad F(x) := \mathbb{P}(\xi < x)$

$$F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x) \quad \forall x \text{ – точ. непр. } F(x)$$

2. $$\int f(x)\, d\mathbb{P}_{\xi_n} \to \int f(x)\, d\mathbb{P}_{\xi}$$

для $\forall$ огр. $f(x) \in C_b(\mathbb{R})$

3. $\varphi_\xi(x) = \mathbb{E}(e^{ix\xi})$

$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{\xi_n}(x) = \varphi_\xi(x)$ поточечно.

4) Сходимость в L^p: $\xi_n \xrightarrow{L^p} \xi \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(|\xi - \xi_n|^p) = 0$

Отношение разных сходимостей:

$$\begin{matrix} \text{П. н.} \searrow & \\ & P \to D \\ L^p \nearrow & \\ p \geq 2 & \end{matrix}$$

Напоминание о хар. ф-ии

производящих ф-ях моментов.

Хар. ф-я:

$$\varphi_\xi(x) = \mathbb{E}(e^{i\xi x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \mu_n,$$

$$\mu_n = \mathbb{E}(\xi^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n \, dP_\xi = i^{-n} \frac{\partial^n \varphi_\xi(x)}{\partial x^n}\Big|_{x=0}$$

при условии, что $\exists \mu_n < \infty$ для $\forall n = 1, 2, \ldots$

и ряд сходится в некоторой окрестности нуля.

$\varphi_\xi(x)$ — всегда ограничен и $\varphi_\xi(0) = 1$.

Производящая ф-я моментов:

$$M_\xi(x) = \mathbb{E}(e^{\xi z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n z^n}{n!} \qquad z \in \mathbb{C}$$

Производящая ф-я кумулянтов $C_\xi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$

Соотношение между моментами и кумулянтами

Самые важные кумулянты: $c_1 = \mathbb{E}(\xi)$, $c_2 = \mathbb{D}(\xi)$...

для $n>2$, $\mu_n = \sum\limits_{\substack{\text{по разбиениям} \\ \text{множ. из } n \text{ различных точек} \\ \text{на подмнож. из } i_1,\dots,i_k \text{ точек}}} c_{i_1} \dots c_{i_k} = c_n + n c_{n-1} c_1 + \dots$

Знание моментов эквивалентно знанию кумулянтов.

Примеры: 1) $\xi = a = const$ — задаётся дельта-мерой Дирака

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases} \qquad F_\xi(x) = \theta(x-a) \qquad f(x) = \delta(x-a)$$

$$M_\xi(x) = e^{xa} \qquad C_\xi(x) = xa$$

2) Стандартное норм. расп.: $\xi \sim N$ $\quad f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$M_N(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ $\quad C_N(x) = \frac{x^2}{2}$ $\quad c_1 = 0$ $\quad c_2 = 1$, $c_i = 0$ $i>2$

Сдвинутое н. р.: $N(\mu,\sigma) \sim \mu + \sigma N$ $\quad M_{N(\mu,\sigma)}(x) = e^{\frac{\sigma^2 x^2}{2} + \mu x}$

$C(x) = \frac{\sigma^2 x^2}{2} + \mu x$

Проблема моментов.

Можно ли зная все моменты (кумулянты) восстановить распределение?

Ответ: Для единственности достаточно, чтобы моменты убывали достаточно быстро, для того чтобы производящая ф-я моментов была аналитической в некоторой окрестности нуля:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n^{1/n}}{n} < \infty.$$

В частности, если носитель распределения конечен, $|\mu_n| < M^n$, и проблема моментов имеет единств. решение.

Пусть $\{\xi_i\}_n$ — последовательность попарно независимых сл. величин, с конечными первым и вторым моментом: $\mathbb{E}(\xi_n) = \mu$ $D(\xi_n) = \sigma^2$

Определим $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$

З.Б.Ч.: $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu$

Ц.П.Т.: $\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N$, где $F_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Док-во: $M_{\frac{S_n}{n}}(x) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{x S_n}{n}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{x}{n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k}\right) =$

$\prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{\frac{x \xi_i}{n}}\right) = M^n_{\xi_1}\left(\frac{x}{n}\right) = e^{n C_{\xi_1}\left(\frac{x}{n}\right)} =$

$= e^{n\left(\frac{\mu x}{n} + \frac{\sigma^2 x^2}{2n^2} + \bar{o}\left(\frac{x^3}{n^3}\right)\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\mu x}$

$M_{\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}}(x) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} x}\right) = e^{-\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma}} M^n_{\xi_1}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$

$e^{-\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma}} e^{n\left(\frac{\mu x}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{\sigma^2 x^2}{2\sigma^2 n} + \bar{o}\left(\frac{x^3}{n^{3/2}}\right)\right)} \to e^{\frac{x^2}{2}}$

В З.Б.Ч. и Ц.П.Т. мы обсуждали независимые сл. вел. Далее мы будем пытаться делать подобного рода утверждения для наборов зависимых величин. Оказывается, существуют широкие классы систем демонстрирующих на больших масштабах характерное поведение, которое не зависит от микроскопических деталей. Первым таким объектом станут случайные матрицы.

Где возникают случайные матрицы?

Впервые случайные матрицы возникли при изучении спектров ядер. Хотя диагонализация гамильтонианов больших взаимодействующих систем чрезвычайно сложная и не решаемая точно задача. Тем не менее оказалось, что статистически уровни энергии ведут себя как собственные значения некоторого класса случайных матриц. Позже это оказалось справедливым и для других сложных квантовых систем, таких как квантовые бильярды, квантовые точки и т.д.. С другой стороны для математиков случайные матрицы интересны например тем, что поведение подобное собственным значениям случайных матриц обнаруживается в структуре комплексных нулей дзета-функции Римана, которые в свою очередь тесно связаны с распределением простых чисел.

Полукруглый закон Вигнера в матрицах Вигнера.

Пусть $M^{(n)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметрическая матрица размера $n\times n$

$$M^{(n)}_{ij} = M^{(n)}_{ji}, \qquad i,j = 1,\dots,n$$

где матричные элементы на и выше главной диагонали независимые сл. в. с нулевым средним

$$\mathbb{E}(M_{ij}) = 0 \qquad 1 \le i \le j \le n$$

и величины выше главной диагонали имеют одинаковую дисперсию

$$\mathbb{D}(M_{ij}) = \sigma^2, \qquad 1 \le i < j \le n$$

Для док-ва будем также предполагать, что все остальные моменты конечны.

Теорема: З.Б.Ч. для спектра матрицы (Вигнер)

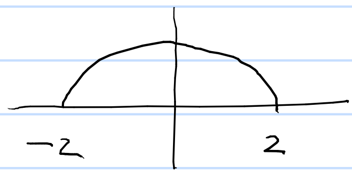
Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - собств. знач. матрицы $m^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} M^{(n)}$

Тогда для $\forall g(x) \in C_b(\mathbb{R})$ - ограниченная непрерывн. ф-ия

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\lambda_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \int_{\mathbb{R}} g(x) f_{sc}(x)\,dx,$$

где $f_{sc}(x)$ - полукруглый закон Вигнера:

$$f_{sc}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}, & |x|<2 \\ 0, & |x|>0 \end{cases}$$



Переформулируем результат в терминах сходимости эмпирические спектральные меры:

$$L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i}, \text{ где } \delta_{\lambda_i} \text{ - мера Дирака } \delta_a(A) = \begin{cases} \frac{1}{n}; & a\in A \\ 0; & a\notin A \end{cases}$$

Утверждение теоремы: $\int f(x)\, dL_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \int f(x)\, d\mu_{sc}$ (*)

для $\forall$ $f(x) \in C_b(x)$

Определение: Сходимость случайных мер, задаваемые равенством (*), называется слабой сходимостью по вероятности. Аналогично определяется слабая сходимость почти наверное и в среднем.

Пример: Сходимость эмпирической ф-ии распределения. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - нез. одинаково распр. сл. величины с ф-ей распред $F(x)$.

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(\lambda_i < h). \qquad \text{З.Б.Ч.} \quad F_n(x) \xrightarrow{\mathbb{P}} F(x)$$

$$\text{Ц.П.Т.} \qquad \sqrt{n}\,(F_n(x) - F(x)) \sim N[0, F(x)(1-F(x))]$$

Для док-ва теоремы изучим сходимость моментов:

$$\mu_k^{(n)} = \int x^k\, dL_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(m^{(n)})^k.$$

1) Изучим сходимость средних: $\overline{\mu_k^{(n)}} = \mathbb{E}(\mu_k^{(n)})$

(Таким образом мы изучаем сходимость среднего эмпир. распред. $\overline{L}_n = \mathbb{E}(L_n)$)

1) $$\overline{\mu_1^{(n)}} = \frac{1}{n}\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(m^{(n)})) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\mathbb{E}(M_{ii}) = 0$$

2) $$\overline{\mu_2^{(n)}} = \mathbb{E}\left(T((m^{(n)})^2)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{n}\mathbb{E}(M_{ij}M_{ji})$$

$$= \frac{1}{n^2\sigma^2}\left(\sum_{i\neq j}\mathbb{E}(M_{ij}^2) - \sum_i \mathbb{E}(M_{ii}^2)\right) =$$

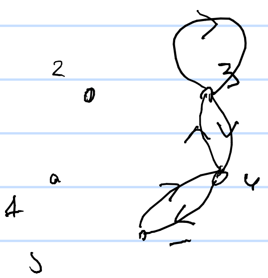
$$= \frac{1}{n^2\sigma^2}\left(n(n-1)\sigma^2 - n\cdot \mathrm{cnst}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

3) $$\overline{\mu_3^{(n)}} = \frac{1}{n}\frac{1}{\sigma^3}\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{n} M_{i_1 i_2}M_{i_2 i_3}M_{i_3 i_1} =$$

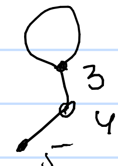
Т.к. $\mathbb{E}(M_{ij})=0$, ненулевой вклад даёт только степени M_{ij} выше первой

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n^{5/2}\sigma^3}\sum_{i=1}^{n} M_{ii}^3 = \frac{n\cdot \mathbb{E}(M_{ii}^3)}{n^{5/2}\sigma^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Изобразим каждое слагаемое $M_{i_1 i_2} M_{i_2 i_3} \cdots M_{i_k i_1}$ графически. Нарисуем n вершин с номерами $1,\dots,n$ и положим в соответствие M_{ij} стрелку $i \to j$. Тогда каждому слагаемому соответствует цикл $i_1 \to i_2 \to \dots \to i_k \to i_1$ с k стрелками



$\longrightarrow$



$- M_{54} M_{43} M_{33} M_{34} M_{45}$,

Нарисуем граф G, соединив ребром каждую пару вершин, которые соединены стрелками.
Ненулевой вклад дают такие циклы, которые проходят через любую пару вершин не менее двух раз.

<u>Предложение.</u>

Пусть граф $G(E,V)$ построен из E ребер и V вершин. Тогда $V \le E+1$, причем

$V = E+1 \iff G$ — дерево.

Таким образом граф G содержит не более

$\left[\frac{k}{2}\right]$ ребер и $\left[\frac{k}{2}\right]+1$ вершин.

Сведем задачу о вычислении моментов к задаче перечисления таких циклов.

$$\overline{\mu}_k^{(n)} = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\mathrm{Tr}\,(m_n^k)\right) = \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_{\substack{\text{по } k\text{-циклам} \\ i_1 \to \dots \to i_k}} \mathbb{E}\left(M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_k i_1}\right)$$

Для вычисления суммы по k-циклам, разобьем множество k-циклов на классы эквивалентности. Перенумеруем вершины в цикле в порядке их посещения, т.е. начинаем с вершины $i_1 = 1$, и будем присваивать следующий номер вершине которую мы посещаем в 1-й раз. Пусть некоторый цикл содержит $m \le \left[\frac{k}{2}\right] - 1$ вершин. Вклад в сумму не зависит от того какие именно m из n вершин выбраны и в каком порядке они занумерованы. Назовем классом эквивалентности все циклы, полученные из данного заменой m его вершин на любую другую упорядоченную выборку m из n вершин. Число циклов в классе эквивалентности равно числу таких выборок (размещений): $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Будем вычислять сумму по циклам в два этапа: по числу вершин в цикле и по представителям классов эквивалентности.

$$\overline{\mu}_k^{(n)} = \sum_{\substack{\text{циклам} \\ \text{с } m \le \left[\frac{k}{2}\right]+1 \\ \text{вершин}}} = \sum_{m=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} A_n^m \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_{\substack{\text{по классам} \\ \text{эквивалентности} \\ (i_1, \dots, i_k) \in (1, \dots, m)}} \mathbb{E}\left(M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_k i_1}\right)$$

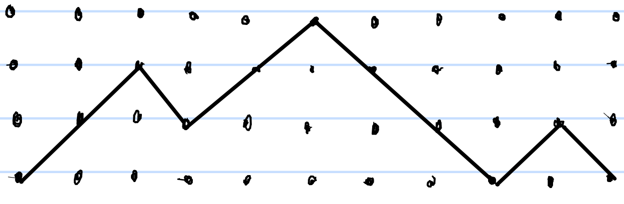
Внутренняя сумма, сумма по всем циклам, которые можно построить на m вершинах, зависит только от m. Заметим, что все слагаемые с $m < \left[\frac{k}{2}\right] + 1$ исчезающе малы:

$$A_n^m \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum \mathbb{E}\left(M_{i_1 i_2} \cdots M_{i_k i_1}\right) = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)\,c(m)}{n^{k/2+1}} \simeq c(m)\, n^{m-\frac{k}{2}-1} = \overline{o}(1).$$

Таким образом ненулевой вклад во внешнюю сумму даёт только слагаемое с $m=\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+1=\frac{k}{2}+1$, что возможно только при чётных k.
В неё входят циклы из k шагов, с $m=\frac{k}{2}+1$ вершинами, которые начинаются там же где заканчиваются. Такой цикл можно представить как обход дерева, в котором каждое ребро проходится два раза, по одному в каждом направлении.
Построим все такие циклы, на $m=\frac{k}{2}+1$ вершинах, которые пронумерованы в порядке посещения. Начнем с первой вершины. Потом идем во вторую. Потом можно либо вернуться в первую, либо пойти в третью. Чтобы нарисованный граф оставался деревом, на каждом шаге мы можем пойти в следующую вершину, либо вернуться в предыдущую. В конце концов на k-том шаге мы должны вернуться в вершину номер 1.

Сопоставим каждому циклу последовательность чисел $+1$ и -1. Шагу, который увеличивает номер вершины поставим в соответствие $+1$, и -1 если уменьшает. Заметим, что на каждом шаге сумма чисел неотрицательна, и равна нулю при каждом возвращении в начальную вершину и только тогда, причём на следующем шаге допускается только $+1$. За исключением этих ограничений $+1$ и -1 могут возникать в произвольном порядке. Поскольку на последнем шаге мы должны вернуться в начало, общая сумма должна быть нулевой. Полученный объект может быть представлен в виде пути Дика.

Опр. Путем Дика называется непрерывная ломаная на плоскости, соединяющая точки $(0,0)$ и $(0,2k)$, состоящая из векторов $(1,1)$ и $(1,-1)$, составленных в произвольном порядке при условии, что вся ломаная лежит в верхней полуплоскости



Видно, что последовательность плюс и минус единиц, соответствующая, рассмотренному выше обходу $(\frac{k}{2}+1)$ вершин строится по тому же принципу, что и последовательность векторов $(1,1)$ и $(1,-1)$ в пути Дика из k шагов (k - четные).

Таким образом мы установили биекцию между множеством циклов и множеством путей Дика из k шагов.

<u>Утверждение</u>: Число путей Дика из $2k$ шагов равно числу Каталана

$$C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k},$$

(Для доказательства см. курс дискретной математики, читаемый на первом курсе.)

Примечание: Другой способ представления того же комбинаторного объекта — правильные скобочные структуры, в которых левые скобки "(" сопоставляется числу $+1$, а правая ")" — числу -1.

Получили: $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{\mu}_k^{(n)} = C_k$.

Моменты полукруглого закона Вигнера:

$$\mu_{2k}^{sc} = \frac{1}{2\pi}\int x^{2k}\sqrt{4-x^2}\,dx = C_k.$$

2) Далее необходимо исследовать собственно сходимость моментов как случайных величин.

<u>Утверждение</u>: $\mu_k^{(n)} \xrightarrow{P} \mu_k^{sc}$

Для доказательства исследуем сходимость дисперсии.

$$D(\mu_k^{(n)}) = \mathbb{E}\left((\mu_k^{(n)} - \bar{\mu}_k^{(n)})^2\right) = \mathbb{E}\left((\mu_k^{(n)})^2\right) - \left(\bar{\mu}_k^{(n)}\right)^2$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\mu_k^{(n)}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\left(\operatorname{Tr}\left[(m^{(n)})^k\right]\right)^2\right) =$$

$$\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \\ j_1,\dots,j_k}} \mathbb{E}\left(m^{(n)}_{i_1 i_2}\dots m^{(n)}_{i_k i_1}\, m^{(n)}_{j_1 j_2}\dots m^{(n)}_{j_k j_1}\right) = \frac{1}{n^{k+2}} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \\ j_1,\dots,j_k}} \mathbb{E}\left(M^{(n)}_{i_1 i_2}\dots M^{(n)}_{i_k i_1}\, M^{(n)}_{j_1 j_2}\dots M^{(n)}_{j_k j_1}\right)$$

Слагаемые в последней сумме опять можно изобразить графически в виде пары циклов: $i_1 \to \dots \to i_k \to i_1$ и $j_1 \to \dots \to j_k \to j_1$, причем ребро соединяющее пару вершин, должно проходиться как минимум 2 раза. Выживают или нет вклады соотв. тем или иным классам эквивалентности пар циклов в пределе $n \to \infty$ зависит от числа представителей в данном классе. Наибольший вклад дают пары циклов не содержащих общих вершин, т.е. в которых

$$\{i_1,\dots,i_k\} \cap \{j_1,\dots,j_k\} = \emptyset.$$

Очевидно, что в этом случае неисчезающий вклад снова дают циклы, проходящие по каждому ребру дерева из $k/2+1$ вершин по разу в обоих направлениях. Число способов выбора $2(k/2+1)$ вершин в этом случае равно при четных k:

$$A_n^{k+2} = \frac{n!}{(n-k-2)!} \sim n^{k+2},$$

т.е. после нормировки на n^{k+2} даёт вклад порядка 1.

Однако поскольку такие циклы не содержат общих ребер, то имеем

$$\mathbb{E}\left(M^{(n)}_{i_1 i_2}\dots M^{(n)}_{i_k i_1}\, M^{(n)}_{j_1 j_2}\dots M^{(n)}_{j_k j_1}\right) = \mathbb{E}\left(M^{(n)}_{i_1 i_2}\dots M^{(n)}_{i_k i_1}\right)\mathbb{E}\left(M^{(n)}_{j_1 j_2}\dots M^{(n)}_{j_k j_1}\right),$$

откуда имеем:

$$\sum_{\{i_s\}\cap\{j_s\}=\emptyset} \mathbb{E}\left(m^{(n)}_{i_1 i_2}\dots m^{(n)}_{i_k i_1}\, m^{(n)}_{j_1 j_2}\dots m^{(n)}_{j_k j_1}\right) - \left(\mu_k^{(n)}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Далее необходимо перечислить пары циклов, которые имеют общие вершины. Очевидно, что число циклов в соответствующих классах эквивалентности есть $\bar{o}(n^{k+2})$ и поэтому вносят исчезающий вклад в дисперсию.

В результате получим:

$$D(\mu_k^{(n)}) \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Из сходимости в L^2 следует сходимость по вероятности, откуда имеем искомое утверждение для моментов.

Из утверждения о сходимости моментов следует сходимость интегралов от любых многочленов: $\int P_m(x)\, dL_n(x)$

Чтобы сделать утверждения относительно слабой сходимости по вероятности, необходимо обобщить это утверждение на произвольные функции из $C_b(\mathbb{R})$.

Вообще говоря сходимость моментов по вероятности еще не предполагает слабой сходимости меры по вероятности. Однако это так для большого класса мер, в частности когда предельная мера полностью определяется своими моментами.

В нашем случае достаточно доказать следующее утверждение, которое мы оставляем для самостоятельного доказательства

Лемма. Пусть моменты последовательности случайных мер L_n сходятся по вероятности (почти наверное) к моментам меры ℓ с компактным носителем, т.е.

$$\int x^k\, dL_k \xrightarrow{\mathbb{P}} \int x^k d\ell \qquad \left(\int x^k dL_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \int x^k d\ell \right), \ \operatorname{Supp}(\ell) < \infty$$

тогда L_k слабо сходятся к ℓ по вероятности (почти наверное)

(Указание: для доказательства воспользоваться теоремой Вейерштрасса о приближении функций на компакте многочленами. Поскольку носитель мер L_n вообще говоре не ограничен, то требуется показать, что вклад в интегралы от области вне некоторого отрезка, содержащего носитель меры е пренебрежимо мал. Для этого можно воспользоваться неравенством Маркова (см. ниже))

Дополнение (О док-ве сходимости почти навер-но.)

Основным инструментом док-ва сходимости п.н. является лемма Бореля-Кантелли.

Лемма (Бореля-Кантелли, N 1.)

Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность событий и

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right).$$

Тогда, если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, то $\mathbb{P}(A)=0$.

В применении к последовательностям случайных величин лемма Бореля-Кантелли в сочетании с неравенством Маркова позволяет доказывать сходимость п.н.

Неравенство Маркова:

Пусть $\xi \geq 0$ - случайная величина,

Тогда $\mathbb{P}(\xi \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(\xi^k)}{a^k}$

Док-во: $\mathbb{P}(\xi \geq a) = \int \mathbb{1}_{x\geq a}\, d\mathbb{P}_\xi(x) \leq \int \mathbb{1}_{x\geq a} \left|\frac{x}{a}\right|^k d\mathbb{P}_\xi(x) \leq \dfrac{\mathbb{E}(\xi^k)}{a^k}$ □

Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ξ случайные величины, такие что $\exists k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(|\xi_n - \xi|^k) \le \frac{a}{n^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$, $a > 0$.

Тогда $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.

Док-во: Назовем $A_n = \{\omega : |\xi_n - \xi| > \varepsilon\}$

по неравенству Маркова: $\mathbb{P}(A_n) \le \frac{\mathbb{E}(|\xi_n - \xi|^k)}{\varepsilon^k} \le \frac{a}{\varepsilon^k n^{1+\varepsilon}}$

т. к. $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \le \frac{a}{\varepsilon^k} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} = \frac{\zeta(1+\varepsilon)\, a}{\varepsilon^k}$, то по

лемме Бореля-Контелли $\mathbb{P}(A) = 0$

Событие $A = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$: $\forall n \; \exists k > n : |\xi - \xi_k| > \varepsilon$

имеет вероятность $\mathbb{P}(A) = 0$. Обратное событие:
$\overline{A} = \{\omega : \exists n : \forall k > n \;\; |\xi - \xi_n| \le \varepsilon\}$ имеет
вероятность $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1$, т.е. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$.

<u>Задача</u>. Используя неравенство Маркова и лемму Б.-К. доказать сходимость моментов эмпирического распределения Вигнеровских матриц почти наверное.