теория вероятностей. листок 1. крайний срок сдачи 6 февраля.

Преобразования случайных величин. Условные математические ожидания. Сходимость случайных величин.

(1) Доказать, что с.в. $(XY)^Z$, где X, Y, Z независимы и равномерно распределены на $[0,1]$, равномерно распределена на $[0,1]$.

(2) Пусть ξ — двумерный нормальный случайный вектор с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. Найти $\mathbb{E}(\exp(-\frac{1}{2}\langle R\xi, \xi\rangle))$, где
$$R = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(3) Пусть ξ, η — дискретные, одинаково распределенные, независимые с.в. Докажите, что $\mathbb{E}(\xi|\xi+\eta) = \mathbb{E}(\eta|\xi+\eta)$. Пользуясь линейностью условного математического ожидания, докажите, что $\mathbb{E}(\xi|\xi+\eta) = \frac{\xi+\eta}{2}$.

(4) Пусть ξ, η — независимые показательные с.в. с параметром 1. Найти формулу для условного математического ожидания $\mathbb{E}(f(\xi,\eta)|\xi+\eta)$.

(5) Пусть P — борелевская мера на $\mathbb{R}^2$, а P_x — мера на $\mathbb{R}$, являющаяся проекцией P на ось Ox.

Докажите, что если мера Q имеет плотность относительно P (т.е. $\frac{dP}{dQ} = f(x,y)$), то проекцией Q на ось Ox является мера $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_x)\cdot P_x$, где $\mathcal{B}_x$ — σ-алгебра множеств вида $\{A\times\mathbb{R}, A\subset\mathbb{R}$ — борелевское множество на прямой$\}$.

(6) Пусть ξ, η — случайные величины, f_ξ, f_η — плотности их распределений. Величина $-\mathbb{E}\log f_\xi(\xi)$ называется **энтропией** случайной величины ξ.

Доказать неравенство
$$\mathbb{E}\log f_\xi(\xi) \geq \mathbb{E}\log f_\eta(\xi).$$

(7) Рассмотрим множество случайных величин, удовлетворяющих условию $\mathbb{E}\xi = 0, \mathbb{E}\xi^2 = 1$. Докажите, что максимальное значение энтропии среди таких случайных величин достигается на нормальной с.в.

(8) Построить пример последовательности с.в., сходящейся в $L^1(P)$, но не сходящейся почти всюду.

(9) Докажите, что если $\xi_n \to \xi$ п.н. и $\sup_n \mathbb{E}(|\xi_n|^p) < \infty$ для $p > 1$, то $\mathbb{E}|\xi_n - \xi| \to 0$.

(10) Доказать, что для независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_n, $\mathbb{E}(\xi_n) = 0$, $\mathbb{E}(\xi_n^2) = 1$ выполнено $\overline{\lim}_n \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty$ п. н..

(11) Пусть $\{\xi_i\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных с.в., $\mathbb{E}\xi_i^2 < \infty$ Доказать, что если $n^{-1/2}\sum_{i=1}^n \xi_i$ сходится п.в. к с.в. ξ, то $\xi_i = 0$ п.в.

(12) Пусть $\{\xi_i\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathbb{E}\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2$. Докажите, что $\frac{\sum_{i=1}^d \xi_i}{\sum_{i=1}^d \xi_i^2}$ сходится по вероятности и найти предел.

(13) Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных показательные с.в. с параметром 1. Рассмотрите события $A_n = \{\xi_n \geq$

$h(n)\}, n \in \mathbb{N}$, где $h(n)$ любая из функций $c\ln n, \ln n + c\ln\ln n$ или $\ln n + \ln\ln n + c\ln\ln\ln n$, и $A := \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n} A_n$. Покажите, что

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } c > 1 \\ 1, & \text{если } c \leq 1 \end{cases}.$$

(14) Доказать, что если последовательность независимых с.в. $\{\xi_i\}$ сходится п.в. к с.в. ξ, то ξ постоянна п.в.

(15) Пусть $\{X_n\}$ — независимые с.в. с

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\ln n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln n}.$$

Докажите, что последовательность S_n/n сходится по вероятности, но не п.н.

(16) (Теорема Вейерштрасса о приближении многочленами). Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq x\leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f(k/n) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| = 0.$$