Листок 9. Функциональные последовательности и ряды

Анализ, 1 курс, **17.02.2017**

9◇1 Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость при $x \in \mathbb{R}$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, где

а) $f_n(x) = \dfrac{x^3 \sin(nx)}{1+n^3x^6}$, **б)** $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^3+x^2}$, **в)** $f_n(x) = \sin^2\left(\dfrac{1}{1+nx^2}\right)$.

9◇2 Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость при $x \in [0,\infty)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, где

$$f_n(x) = \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)}. \quad \text{Оцените величину} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

9◇3 Приведите пример ряда из неотрицательных функций на отрезке $[0;1]$, такого что
а) функции разрывные, ряд равномерно сходится к непрерывной функции;
б) функции непрерывны, ряд сходится к разрывной функции.

9◇4 Приведите примеры степенных рядов с радиусом сходимости $R > 0$, которые сходятся равномерно **а)** на $[-R,R]$; **б)** на $[0,R]$, но не сходится равномерно на $[-R,R]$.

9◇5 Пусть степенные ряды $\sum a_nx^n$ и $\sum b_nx^n$ имеют радиусы сходимости $r_1 \neq r_2$.
а) Докажите, что ряд $\sum(a_n+b_n)x^n$ имеет радиус сходимости $\min(r_1,r_2)$;
б) Что можно сказать о радиусе сходимости ряда $\sum(a_n+b_n)x^n$ при $r_1 = r_2$?
в) Докажите, что ряд $\sum a_nb_nx^n$ имеет радиус сходимости $r \geqslant r_1r_2$.

9◇6 Пусть ряд $\sum \frac{1}{a_n}$, где $a_n \in \mathbb{C}$, абсолютно сходится. Докажите, что ряд $\sum \frac{1}{x-a_n}$ сходится равномерно на любом компакте из $\mathbb{C}$, не содержащем точек a_n.

9◇7 Докажите, что если последовательность $a_n(x)$ неотрицательных ограниченных монотонных возрастающих функций $a_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ монотонно поточечно сходится к нулю, то ряд $\sum(-1)^n a_n(x)$ равномерно сходится.

9◇8 Степенной ряд $\sum a_nx^n$ имеет периодические с некоторого места коэффициенты. Докажите, что на некотором невырожденном промежутке этот ряд равномерно сходится к рациональной функции $P(x)/Q(x)$ (где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены). Верно ли обратное утверждение?

9◇9 Пусть $f'(x)$ существует и непрерывна на $[a,b+1]$. Доказать, что последовательность $n(f(x+1/n)-f(x))$ равномерно на $[a,b]$ сходится к $f'(x)$.

9◇10* Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ равен 1 и $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Пусть $\lim_{x\to 1-0} f(x) = s$, пусть $na_n \leqslant 1$. Докажите, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.