Листок 3. Дифференциальные формы

Анализ на многообразиях 2017, **срок сдачи — 20.2.2017**

Для $U \subset \mathbb{R}^n$ зафиксируем евклидово скалярное произведение $(\ ,\ )$ и форму объёма $w = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

3◇1 Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — векторы в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что

$$\det \|(v_i, v_j)\|_{1 \le i,j \le n} = (w(v_1, \ldots, v_n))^2.$$

Для гладкой функции f определим *градиент* — векторное поле $\operatorname{grad} f$ в каждой точке равенством $(\operatorname{grad} f, v) = df(v)$ для всякого вектора v.

3◇2 Докажите, что в точке, где $\operatorname{grad} f \neq 0$, отношение производной f вдоль вектора v к длине v максимально, если v пропорционально $\operatorname{grad} f$ в этой точке. Выразите это отношение через длину $\operatorname{grad} f$.

Для векторного поля v (гладкого сечения касательного расслоения) определим *форму работы* α_v поточечным равенством $\alpha_v(u) = (v, u)$. Для ориентированной кривой C определим *работу* (синоним — *циркуляцию*) v как $\int_c \alpha_v$.

3◇3 Докажите, что следующие два определения *потенциального векторного поля* эквивалентны:
(i) работа v по любому замкнутому контуру равна нулю
(ii) v совпадает с градиентом некоторой функции (она называется *потенциалом* v).

Для векторного поля v определим *форму потока* $\phi_v = i_v w$, где i_v — свёртка векторного поля с формой. Для ориентированной гиперповерхности S определим *поток* векторного поля через S как $\int_S \phi_v$.

3◇4 Пусть $v = \sum_i f_i \partial/\partial x_i$. Докажите, что

$$\alpha_v = \sum_{i=1}^n f_i dx_i, \qquad \phi_v = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

3◇5 **а)** Докажите, что $d\phi_v$ поточечно пропорционально w. Вычислите в координатах коэфициент пропорциональности. Он называется *дивергенцией* векторного поля v и обозначается $\operatorname{div} v$
б) Вычислите в координатах *лапласиан* функции $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$.
в) Докажите, что для векторного поля v и гладкой функции f выполнено $\operatorname{div}(fv) = (\operatorname{grad} f, v) + f \operatorname{div} v$.

3◇6 Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — связное множество с гладкой границей, S — граница D с индуцированной ориентацией. Пусть v — векторное поле на D. Докажите, что поток v через S равен $\int_D (\operatorname{div} v) w$.

3◇7 Пусть $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поворот на $\pi/2$ по часовой стрелке. Докажите, что поле v в $\mathbb{R}^2$ является потенциальным тогда и только тогда, когда выполняется $\operatorname{div} J(v) = 0$, где J применяется к касательному пространству в каждой точке

Для векторного поля $v = f_1\partial/\partial x_1 + f_2\partial/\partial x_2 + f_3\partial/\partial x_3$ в $\mathbb{R}^3$ определим *ротор* как

$$\operatorname{rot} v = \det\begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (\partial f_3/\partial x_2 - \partial f_2/\partial x_3)\partial/\partial x_1 + (\partial f_1/\partial x_3 - \partial f_3/\partial x_1)\partial/\partial x_2 + (\partial f_2/\partial x_1 - \partial f_1/\partial x_2)\partial/\partial x_3$$

3◇8 **а)** Докажите, что для векторного поля в $\mathbb{R}^3$ выполнено $d\alpha_v = \phi_{\operatorname{rot} v}$.
б) Пусть S — ориентированная гиперповерхность в $\mathbb{R}^3$, C — граница S с индуцированной ориентацией, v — векторное поле на S. Докажите, что работа v вдоль контура C равна потоку $\operatorname{rot} v$ через поверхность S.

3◇9 Докажите, что следующая последовательность является точной:

$$C^\infty(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{grad}} \operatorname{Vect}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{rot}} \operatorname{Vect}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\text{div}} C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

3◇10* **а*)** Докажите, что для любой 1-формы ω в $\mathbb{R}^2$ в окрестности каждой точки, в которой $\omega \neq 0$, существует функция $f \neq 0$, для которой $d(f\omega) = 0$.
б*) Верно ли это в больших размерностях?

3◇11* Пусть M — гладкое многообразие, $M^k = M \times \cdots \times M$ (всего k сомножителей), $\Delta \subset M^k$ — диагональ, состоящая из точек $(x, x, \ldots, x)$. Пусть $C^{\wedge k}$ — пространство кососимметрических функциий на M^k, то есть для которых $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = \operatorname{Sign}(\sigma) f(x_1, \ldots, x_k)$.
а*) Докажите, что всякая функция из $C^{\wedge k}$ имеет ноль кратности по крайней мере $k(k-1)/2$ на Δ.
б*) Установите изоморфизм факторпространства $C^{\wedge k}$ по подпространству функций с нулём кратности большей $k(k-1)/2$ с пространством $(k-1)$-форм на M так, чтобы отображение

$$df(x_1, \ldots, x_{k+1}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{Sign}(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$$

задавало дифференциал.