

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЛИСТОК 1. КРАЙНИЙ СРОК СДАЧИ 6 ФЕВРАЛЯ.

Преобразования случайных величин. Условные математические ожидания. Сходимость случайных величин.

- (1) Доказать, что с.в. $(XY)^Z$, где X, Y, Z независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$, равномерно распределена на $[0, 1]$.
- (2) Пусть ξ — двумерный нормальный случайный вектор с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. Найти $\mathbb{E}(\exp(-\frac{1}{2}\langle R\xi, \xi \rangle))$, где

$$R = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (3) Пусть ξ, η — дискретные, одинаково распределенные, независимые с.в. Докажите, что $\mathbb{E}(\xi|\xi + \eta) = \mathbb{E}(\eta|\xi + \eta)$. Пользуясь линейностью условного математического ожидания, докажите, что $\mathbb{E}(\xi|\xi + \eta) = \frac{\xi + \eta}{2}$.
- (4) Пусть ξ, η — независимые показательные с.в. с параметром 1. Найти формулу для условного математического ожидания $\mathbb{E}(f(\xi, \eta)|\xi + \eta)$.
- (5) Пусть P — борелевская мера на \mathbb{R}^2 , а P_x — мера на \mathbb{R} , являющаяся проекцией P на ось Ox .

Докажите, что если мера Q имеет плотность относительно P (т.е. $\frac{dP}{dQ} = f(x, y)$), то проекцией Q на ось Ox является мера $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}_x) \cdot P_x$, где \mathcal{B}_x — σ -алгебра множеств вида $\{A \times \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R} — борелевское множество на прямой\}$.

- (6) Пусть ξ, η — случайные величины, f_ξ, f_η — плотности их распределений. Величина $-\mathbb{E} \log f_\xi(\xi)$ называется **энтропией** случайной величины ξ .

Доказать неравенство

$$\mathbb{E} \log f_\xi(\xi) \geq \mathbb{E} \log f_\eta(\xi).$$

- (7) Рассмотрим множество случайных величин, удовлетворяющих условию $\mathbb{E}\xi = 0, \mathbb{E}\xi^2 = 1$. Докажите, что максимальное значение энтропии среди таких случайных величин достигается на нормальной с.в.
- (8) Построить пример последовательности с.в., сходящейся в $L^1(P)$, но не сходящейся почти всюду.
- (9) Докажите, что если $\xi_n \rightarrow \xi$ п.н. и $\sup_n \mathbb{E}(|\xi_n|^p) < \infty$ для $p > 1$, то $\mathbb{E}|\xi_n - \xi| \rightarrow 0$.
- (10) Доказать, что для независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_n, \mathbb{E}(\xi_n) = 0, \mathbb{E}(\xi_n^2) = 1$ выполнено $\overline{\lim}_n \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty$ п. н..
- (11) Пусть $\{\xi_i\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных с.в., $\mathbb{E}\xi_i^2 < \infty$. Доказать, что если $n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \xi_i$ сходится п.в. к с.в. ξ , то $\xi_i = 0$ п.в.
- (12) Пусть $\{\xi_i\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathbb{E}\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2$. Докажите, что $\frac{\sum_{i=1}^d \xi_i}{\sum_{i=1}^d \xi_i^2}$ сходится по вероятности и найти предел.

- (13) Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных показательных с.в. с параметром 1. Рассмотрите события $A_n = \{\xi_n \geq h(n)\}$, $n \in \mathbb{N}$, где $h(n)$ любая из функций $c \ln n$, $\ln n + c \ln \ln n$ или $\ln n + \ln \ln n + c \ln \ln \ln n$, и $A := \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m$. Покажите, что

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } c > 1 \\ 1, & \text{если } c \leq 1 \end{cases}.$$

- (14) Доказать, что если последовательность независимых с.в. $\{\xi_i\}$ сходится п.в. к с.в. ξ , то ξ постоянна п.в.
 (15) Пусть $\{X_n\}$ — независимые с.в. с

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n \ln n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \ln n}.$$

Докажите, что последовательность S_n/n сходится по вероятности, но не п.н.

- (16) (Теорема Вейерштрасса о приближении многочленами). Пусть $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f(k/n) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| = 0.$$