

ЛИСТОК 1

Введение в алгебраическую геометрию - матфак ВШЭ - 2017

Первая часть вводная. Тем не менее эти задачи нужно уметь решать (вас могут выборочно попросить рассказать решения проверяющие).

1 Докажите, что гипербола $xy = 1$ в аффинной плоскости не изоморфна аффинной прямой. Являются ли они бирационально изоморфными?

2 Пусть $k = \bar{k}$, $f : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^2$ отображение, заданное формулой $f(t) = (t^2, t^3)$. Покажите, что f биекция на свой образ, но образ f не изоморфен \mathbb{A}^1 (указание: можно вспомнить про целозамкнутость). Покажите, что f задает бирациональный и конечный морфизм на свой образ.

3 Пусть $X \subset \mathbb{A}^3$ - множество точек вида (t, t^2, t^3) . Покажите, что X алгебраическое множество и найдите систему образующих идеала $I(X)$. Покажите, что X изоморфно \mathbb{A}^1 .

4 Разложите алгебраическое множество в \mathbb{A}^3 , определяемое уравнениями $y^2 = xz$, $z^2 = y^3$ на неприводимые компоненты и опишите эти компоненты.

5 Размерностью аффинного алгебраического множества назовем размерность его кольца регулярных функций. Покажите, что неприводимое алгебраическое подмножество в \mathbb{A}^n (над алгебраически замкнутым полем) тогда и только тогда имеет размерность $n - 1$, когда оно является множеством нулей неприводимого многочлена f (воспользуйтесь теоремой Крулля о главных идеалах).

6 Покажите, что неприводимая невырожденная квадрика в \mathbb{A}_k^{n+1} бирационально изоморфна \mathbb{A}_k^n тогда и только тогда, когда она имеет k -точку.

Индуктивный предел (он встречается в определении слоя пучка)

7 Частично упорядоченное множество I называется направленным, если для любых i, j существует такое k , что $i \leq k$, $j \leq k$. Пусть I направленное множество, причем для каждого $i \in I$ задано множество (абелева группа, кольцо) A_i , для каждой пары $i \leq j$ задан гомоморфизм $f_{ij} : A_i \rightarrow A_j$, и выполнены условия $f_{ii} = id$, $f_{ik} = f_{jk}f_{ij}$ (говорят, что $\mathbf{A} = (A_i, f_{ij})$ - индуктивная система). Индуктивный предел $\varinjlim A_i$ - это фактормножество несвязного объединения A_i по отношению эквивалентности: $s_i \sim s_j$, если найдется такое $k \geq i, j$, что $f_{ik}(s_i) = f_{jk}(s_j)$. Очевидно, имеются естественные отображения $f_i : A_i \rightarrow \varinjlim A_i$.

Покажите, что если A_i - абелевы группы (кольца), то и $\varinjlim A_i$ тоже. Покажите, что $\varinjlim A_i$ характеризуется следующим универсальным свойством: если B - множество (абелева группа, кольцо) и для каждого i задан гомоморфизм $b_i : A_i \rightarrow B$ со свойством $b_j f_{ij} = b_i$, то все b_i единственным образом проводятся через $\varinjlim A_i$.

8 Пусть $\mathbf{A} = (A_i, f_{ij})$, $\mathbf{B} = (B_i, g_{ij})$ индуктивные системы. Гомоморфизмом индуктивных систем ϕ называется семейство гомоморфизмов $\phi_i : A_i \rightarrow B_i$, для которого $\phi_j f_{ij} = g_{ij} \phi_i$. Покажите, что ϕ однозначно определяет гомоморфизм индуктивных пределов, коммутирующий с естественными отображениями из A_i и B_i в пределы. Последовательность индуктивных систем абелевых групп называется точной, если для всех индексов точна соответствующая последовательность абелевых групп. Докажите, что индуктивный предел сохраняет точность.

Что это утверждение говорит о пучках?

Основная часть.

9 Ядро гомоморфизма предпучков $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ - это такой предпучок: $\ker(\phi)(U) = \ker(\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U))$. Докажите, что если \mathcal{F} , \mathcal{G} пучки, то $\ker(\phi)$ тоже. Приведите пример, где аналогично определенное "коядро" гомоморфизма предпучков $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ не является пучком, хотя \mathcal{F} , \mathcal{G} пучки.

10 Пусть $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ морфизм пучков. Докажите, что если индуцированные гомоморфизмы слоев $\phi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ инъективны, то $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ инъективны. А как насчет сюръективности?

11 То же с изоморфностью вместо инъективности.

12 Приведите пример нелокального морфизма околыцованных пространств $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$, не индуцированного гомоморфизмом колец $\phi : A \rightarrow B$.

В упражнениях 13-15 основное поле предполагается алгебраически замкнутым; рекомендуется проверить, что происходит над произвольным полем.

13 Докажите, что аффинное многообразие не может быть изоморфно проективному, если это не точка. Выведите отсюда, что любое подмногообразие положительной размерности в \mathbb{P}^n пересекает любую гиперплоскость.

14 Пусть F_0, \dots, F_N все мономы степени d от x_0, \dots, x_n . Определим отображение Веронезе $v_d : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$ формулой $v_d(a_0 : \dots : a_n) = (F_0(a) :$

$\cdots : F_N(a)$), где $a = (a_0, \dots, a_n)$. Докажите, что образ v_d - проективное многообразие и v_d определяет изоморфизм на свой образ.

15 Покажите, что $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ является проективным многообразием (постройте замкнутое вложение в $\mathbb{P}^{n+m+n+m}$, оно называется вложением Сегре). Верно ли, что образ этого отображения не содержится ни в какой гиперплоскости.

15 Используя отображение Веронезе, докажите, что любые две кривые в \mathbb{P}^2 пересекаются.

16 Покажите, что прямая с двойной точкой (склейка двух копий аффинных прямых по подмножествам $\mathbb{A}^1 \setminus 0$ с помощью тождественного морфизма) не является отделимой схемой. (Опишите диагональ с помощью универсального свойства).

17 Пусть $f : X \rightarrow Y$ морфизм алгебраических схем, причем Y отделима. Определите график морфизма с помощью универсального свойства. Покажите, что он получается заменой базы из морфизма диагонали. Покажите, что он замкнут и опишите его уравнениями в случае аффинных многообразий $f : \text{Spec} A \rightarrow \text{Spec} B$ (начала опишите его идеал в $A \otimes B$ как ядро морфизма $a \otimes b \rightarrow af^*(b)$, затем опишите уравнения, как в случае диагонали).

18 Покажите, что в отделимой схеме пересечение двух открытых аффинных подмножеств также аффинно (реализуйте их пересечение как пересечение с диагональю).

19 Покажите, что образ полного многообразия, также является полным многообразием.