Группы и алгебры Ли II

Семинар 1

1. Докажите, что у произвольного конечного множества попарно коммутирующих операторов на конечномерном комплексном векторном пространстве есть общий собственный вектор. Можно ли отказаться от условий конечности множества операторов или от условия конечномерности векторного пространства?

2. Приведите пример приводимого, но неразложимого конечномерного комплексного представления какой-нибудь группы.

3. Докажите, что группа GL_n раскладывается в полупрямое произведение SL_n и некоторой одномерной подгруппы.

4. Докажите, что группа $O_n(\mathbb{R})$ является группой Ли, и найдите её размерность.

5. Опишите все гомоморфизмы аддитивной группы Ли поля $\mathbb{C}$ в группу $GL_n(\mathbb{C})$.

6. Докажите, что централизатор Z_g любого элемента $g \in GL_n$ является подгруппой Ли и найдите минимальную возможную размерность Z_g.

7. Докажите, что для линейно зависимых x, y, z тождество Якоби

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

следует из антикоммутативности операции $[\ ,\ ]$.

8. Является ли присоединённое представление $SL_2(\mathbb{C})$ неприводимым? Тот же вопрос про $SL_n(\mathbb{C})$.