

## Группы и алгебры Ли II

### Семинар 2

1. Докажите, что группа  $O_n(\mathbb{R})$  является группой Ли и найдите её размерность.
2. Является ли присоединённое представление  $SL_2(\mathbb{C})$  неприводимым? Тот же вопрос про  $SL_n(\mathbb{C})$ .
3. Найдите центр  $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{k})$  в зависимости от характеристики поля  $\mathbf{k}$ .
4. Докажите, что  $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{k})$  нильпотентна, если характеристика  $\mathbf{k}$  равна двум.
5. Исследуйте все двумерные и трёхмерные алгебры Ли на предмет разрешимости (нильпотентности).
6. Докажите, что любая нильпотентная алгебра имеет нетривиальное внешнее дифференцирование.
7. Докажите, что алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  разрешима (нильпотентна) тогда и только тогда, когда разрешима (нильпотентна) алгебра Ли  $\text{adg}$ .