

## Группы и алгебры Ли II

### Семинар 3

1. Докажите, что все симметрические степени векторного представления  $V$  алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_n$  являются неприводимыми представлениями  $\mathfrak{sl}_n$ . Вычислите старший вес  $S^k V$ .
2. Пусть  $W$  – трёхмерное неприводимое представление  $\mathfrak{sl}_2$ . Докажите, что  $\Lambda^2 W \simeq W$  как  $\mathfrak{sl}_2$  модули.
3. Докажите, что для группы  $SL_2(\mathbb{R})$  экспоненциальное отображение не сюръективно.
4. Постройте неприводимое представление размерности 5 алгебры Ли  $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{C})$ .
5. Опишите алгебру Ли централизатора элемента  $g$  из группы Ли  $G$ .
6. Пусть  $G$  – группа Ли,  $\mathfrak{g}$  – её алгебра Ли. Для элемента  $x \in \mathfrak{g}$  рассмотрим его стабилизатор  $Z(x)$  в  $G$  относительно присоединённого действия. Опишите алгебру Ли группы  $Z(x)$ .
7. Разложите на неприводимые компоненты  $n$ -ую симметрическую степень трёхмерного неприводимого представления  $\mathfrak{sl}_2$ .