



## Правительство Российской Федерации

### Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"

Факультет Математики

### Программа дисциплины

«Пучки и сопутствующая гомологическая алгебра»

для направления 010100.62 «Математика» подготовки бакалавра  
для направления 01.04.01 «Математика» подготовки магистра

Автор программы: Городенцев А.Л., к.ф.-м.н., [gorod@itep.ru](mailto:gorod@itep.ru)

Рекомендована секцией УМС по математике «\_\_»\_\_\_\_\_ 2016 г.

Председатель С.М. Хорошкин \_\_\_\_\_

Утверждена УС факультета математики «\_\_»\_\_\_\_\_ 2016 г.

Ученый секретарь Ю.М. Бурман \_\_\_\_\_

Москва, 2016

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*



## 1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра, направления 01.04.01 «Математика» подготовки магистра

Программа разработана в соответствии с:

- ОС НИУ ВШЭ;
- Рабочим учебным планом университета по направлению 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавра 01.04.01 «Математика» подготовки магистра, специализации Математика, утвержденным в 2016 г

## 2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Пучки и сопутствующая гомологическая алгебра» являются:

- Формирование у слушателей ясного представления о базисных понятиях и основных методах теории пучков.
- Знакомство с категорным подходом к геометрии и топологии, а также с элементами некоммутативной геометрии.
- Изучение теории когомологий пучков и её применения для исследования связей между глобальными топологическими и геометрическими характеристиками многообразий и локальными свойствами естественных пучков на них. Сравнение сингулярных и клеточных когомологий с когомологиями Де Рама и Дольбо.
- Прямые и обратные образы пучков. Спектральная последовательность Лере.
- Когомологии когерентных пучков на проективных алгебраических многообразиях и их применения в алгебраической геометрии.
- Представление о топологиях Гротендика и пучках на сайтах.

## 3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Получить общее представление о категорном подходе к геометрии и топологии.
- Изучить основные геометрические и топологические методы теории пучков.
- Изучить теорию когомологий пучков и технику вычисления когомологий пучков в алгебраической и дифференциальной геометрии.
- Быть готовым использовать основные принципы и методы теории пучков и связанной с нею гомологической алгебры в последующей профессиональной деятельности в качестве научного сотрудника или преподавателя вуза.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:



Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
умение формулировать результат	ПК-3	Правильно воспроизводит чужие результаты Правильно формулирует собственные результаты	Компетенция формируется в любом сегменте учебного процесса Формируется в процессе активных занятий (участие в семинарах, выполнение курсовых и дипломных работ).
умение строго доказать утверждение	ПК-4	Воспроизводит доказательства стандартных результатов, услышанных на лекциях Оценивает строгость и корректность научных текстов по гомологической алгебре и теории пучков.	Изучение базового курса За счет повышения в процессе обучения общематематической культуры и освоения основ гомологической алгебры и теории пучков в частности.
умение грамотно пользоваться языком предметной области	ПК-7	Владеет профессиональной лексикой в области гомологической алгебры и теории пучков. Распознает и воспроизводит названия основных математических структур, возникающих при изучении данной дисциплины, умеет корректно формулировать утверждения и их доказательства	Продумывание и повторение услышанного на семинарах и лекциях. Беседы с преподавателями во время консультаций. Компетенция достигается в процессе накопления опыта работы по данной теме и общения с преподавателями.
понимание корректности постановок задач	ПК-10	Понимает постановки проблем и владеет структурным категорным подходом к восприятию геометрических и топологических объектов. Адекватно оценивает корректность использования тех или иных математических методов, применяемых при формулировке и решении задач .	Продумывание базовых понятий курса Вырабатывается в процессе решения задач, самостоятельного чтения, работы над курсовыми заданиями
выделение главных смысловых аспектов в доказательствах	ПК-16	Понимает и воспроизводит ключевые идеи, методы и геометрические конструкции теории пучков. Обосновывает и оценивает мотивировки и логические ходы доказательств основных результатов гомологической алгебры, теории категорий и теории пучков.	Продумывание ключевых моментов лекций Вырабатывается путем активного решения задач, самообразования, общения с преподавателем

#### 4 Место дисциплины в структуре образовательной программы



Настоящая дисциплина относится к циклу математических и естественно научных дисциплин и блоку дисциплин, обеспечивающих подготовку бакалавра и магистра направления подготовки «Математика»

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- базовые курсы алгебры, геометрии, математической логики и математического анализа (первые 6 модулей бакалавриата);
- базовые курсы топологии (4-6 модули бакалавриата).

Желательно, но не необходимо также знакомство с некоторыми основными геометрическими конструкциями из проективной геометрии и знание примеров алгебраических многообразий, таких как проективные пространства, грассманианы, квадрики, многообразия Сегре и Веронезе.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- свободное использование элементарных понятий и терминологии из общей топологии
- свободное владение основными понятиями линейной и элементарной коммутативной алгебры, а также теории представлений (теории модулей над кольцами)

Основные положения дисциплины далее используются при изучении следующих дисциплин:

- Алгебраическая геометрия и теория схем.
- Кэлерова и комплексно аналитическая геометрия.
- Дифференциальная геометрия и топология.
- Алгебраическая теория чисел и диофантова геометрия.
- Геометрическая теория представлений.

## 5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции и	Семинары	Практические занятия	
1	Категории, функторы предпучки. Важные примеры: предпучки на категории открытых множеств топологического пространства и на симплициальной категории. Категория функторов, лемма Йонеды, представимые функторы. Сопряжённые функторы. (Ко) пределы диаграмм.	6	3			3
2	Пучки на топологических пространствах. Слои, этальное пространство и опучковывание предпучка. Прямой и обратный образ. Абелевы пучки.	5	2			3
3	Комплексы и (ко) гомологии, длинная точная последовательность (ко) гомологий. Комплексы Кошуля. Перестановочность гомологий с фильтрованными копределами. Спектральные последовательности	6	3			3



	фильтрованных комплексов, бикомплексов и точных пар.					
4	Глобальные сечения, вялые пучки и вялая резольвента Годемана. Когомологии и гиперкогомологии пучков. Ациклические резольвенты. Последовательность Майера-Вьеториса и резольвента Чеха. Ациклические покрытия и критерий ацикличности Картана. Когомологии Чеха.	6	3			3
5	Мягкие и тонкие пучки на паракомпактных хаусдорфовых пространствах. Пучки дифференциальных форм, лемма Пуанкаре и теорема Де Рама.	5	2			3
6	Высшие прямые образы. Спектральная последовательность Лере.	5	2			3
7	Когерентные пучки в алгебраической геометрии и их геометрические приложения. Ациклическость аффинных покрытий алгебраических многообразий. Когомологии обратимых пучков на проективных пространствах.	6	3			3
8	Топологии Гротендика и пучки на сайтах.	5	2			3
	Итого:	44	20			24

## 6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	модуль		3	4	Параметры **
Текущий (неделя)	Решение домашнего задания			4	4	Письменное задание, выдаваемое студентам на дом + беседа с преподавателем по итогам проверки решений.
Промежуточный	Экзамен				1	Письменная работа на 4 часа

8 письменных домашних заданий

1 экзаменационная контрольная работа

### 6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Основная форма текущего контроля – самостоятельное письменное решение слушателями задач из домашних заданий, и последующее обсуждение проверенных решений с преподавателями. Задачи подбираются так, чтобы их решение требовало от студента свободного владения основными понятиями и умения пользоваться техническими (вычислительными) приемами, которые изучаются в соответствующих разделах курса. Часть задач отмечается звёздочкой — это задачи повышенной сложности, носящие исследовательский характер и предполагающие самостоятельное изучение



студентами материала, не излагавшегося на лекциях. Обсуждение подходов к решению этих задач происходит на семинарах и во время консультаций. Решение задач повышенной сложности не обязательно и не является необходимым условием для получения отличной оценки за домашнее задание, однако способно заметно повысить эту оценку.

Основным итоговым контролем служит письменный экзамен, заключающийся в самостоятельном письменном решении от 4 до 6 задач, требующих от студента владения как понятийным, так и техническим аппаратом по изучавшимся в течение всего семестра темам, так что в каждой задаче с разных точек зрения оказываются представленными сразу несколько тем. Время, отводимое на решение задач — 4 астрономических часа.

## 6.2 Порядок формирования оценки по дисциплине

Итоговая оценка по дисциплине ставится по 10-бальной шкале и вычисляется по формуле:

$$\min(150, E+H)/15$$

где  $E$  и  $H$  суть количества решённых экзаменационных и домашних задач, выраженные в процентах от общего числа экзаменационных и обязательных домашних задач соответственно. При этом задачи повышенной трудности не учитываются в качестве обязательных задач в знаменателе, но учитываются в качестве решённых задач в числителе, так что

$$E=100*(\text{число решённых экзаменационных задач})/(\text{общее число экзаменационных задач})$$

$H=100*(\text{число всех решённых домашних задач, включая задачи повышенной трудности})/(\text{общее число обязательных домашних задач, исключая задачи повышенной трудности})$ .

Таким образом, для получения оценки 10 достаточно, например, успешно решить 75% экзаменационных задач и 75% обязательных домашних задач, или другим способом набрать сумму  $E+H=150\%$ . При наборе меньшей суммы оценка линейно уменьшается. Способ округления оценки — по стандартным правилам округления. Экзаменационный результат  $E<25\%$  считается блокирующим, и студент, решивший менее четверти экзаменационных задач получает неудовлетворительную итоговую оценку. Всякий студент, неудовлетворённый своей экзаменационной оценкой, имеет возможность однократной пересдачи экзамена.

## 7 Образовательные технологии

На лекции обсуждаются ключевые понятия и технические выкладки разбираемой темы, даются необходимые определения, разбираются поучительные примеры. Студентам на дом даются задачи для самостоятельного разбора, содержащие как упражнения для усвоения пройденного материала, так и нестандартные задачи, позволяющие проверить уровень общего понимания предмета и требующие изучения дополнительного материала. Некоторые задачи предваряют или продолжают тематику лекций. Студент сдает задачи как в виде письменных домашних работ, так и в виде устной беседы с преподавателем.

## 8 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

### 8.1 Примеры задач текущего контроля

см. на странице курса <http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/sha/1516/list.html#problems>

### 8.2 Примеры экзаменационных задач

см. на странице курса [http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/sha/1516/exam\\_2015.12.25.pdf](http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/sha/1516/exam_2015.12.25.pdf)



## 9 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 9.1 Базовые учебники

1. *С.И.Гельфанд, Ю.И.Манин.* Методы гомологической алгебры. Часть I., Наука, Москва, 1988.
2. *B. Iversen.* Cohomology of Sheaves.
3. *C.A.Weibel.* An Introduction to Homological Algebra. CUP. 1994

### 9.2 Основная литература

1. *Ф.Гриффитс, Дж.Харрис.* Принципы алгебраической геометрии, I, II. Наука, Москва, 1980.
2. *В.И.Данилов.* Когомологии алгебраических многообразий. В книге «Алгебраическая геометрия–2». Итоги науки и техники. Совр. пробл. математ. Фунд. напр. Т. 35. Москва, ВИНТИ, 1989, с. 5–130.

### 9.3 Дополнительная литература

1. *Р. Годеман.* Алгебраическая топология и теория пучков. М., ИЛ, 1961.
2. *П.Т. Джонстон.* Теория топосов. М., Наука, 1986.

### 9.4 Справочники, словари, энциклопедии

При освоении курса могут быть полезны материалы по темам, размещенные в онлайн энциклопедиях

<http://www.wikipedia.org>,

<http://www.scholarpedia.org>

### 9.5 Программные средства

Специальные программные средства не предусмотрены.

### 9.6 Дистанционная поддержка дисциплины

<http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/sha/1617/list.html>

## 10 Материально-техническое обеспечение дисциплины

При проведении занятий могут быть использованы стандартные компьютерный проектор и система видеозаписи учебных занятий, имеющиеся на факультете математики.