

## Задачи к спецкурсу "Введение в теорию моделей" (2017)

Все модели сигнатуры с равенством считаются нормальными (за исключением задачи 3)

1. Запишите аксиомы теории групп в сигнатуре с равенством и умножением.
2. Запишите аксиомы векторного пространства над полем в подходящей сигнатуре.
3. Докажите, что чистая теория равенства  $E_q$  имеет континуум попарно неизоморфных счетных (ненормальных) моделей.
4. Постройте теорию в сигнатуре с одним 2-местным предикатным символом и равенством, имеющую континуум попарно неизоморфных счетных нормальных моделей.
5. Докажите, что в конечной сигнатуре, состоящей из одноместных предикатных символов и равенства, всякая теория имеет не более счетного числа попарно неизоморфных счетных нормальных моделей.
6. Докажите, что в сигнатуре  $\{0, +, =\}$   $\mathbf{Z} \not\cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ .
7. Докажите, что в сигнатуре  $\{0, +, =\}$  теория класса всех абелевых групп не совпадает с теорией класса всех циклических групп.
8. Докажите, что существует бесконечно много попарно не элементарно эквивалентных бесконечных абелевых групп в сигнатуре  $\{0, +, =\}$ .
9. Постройте формулу в какой-нибудь сигнатуре без равенства, имеющую 3-элементную модель, но не имеющую 2-элементных моделей.
10. Докажите, что существует континуум попарно не элементарно эквивалентных моделей сигнатуры с одним 2-местным предикатным символом и равенством.
11. Докажите, что существует континуум попарно не элементарно эквивалентных моделей сигнатуры с одним 1-местным функциональным символом и равенством.

Определения:

Класс моделей вида  $\text{Mod}(T)$ , где  $T$  — теория первого порядка, называется  $\Delta$ -элементарным.

$[T] = \{\varphi \in \text{CFm}_L \mid T \models \varphi\}$  - логическое замыкание  $T$

Теория  $T$  называется логически замкнутой, если  $[T] = T$ .

12. Докажите следующие утверждения для теории  $T$  и класса  $L$ -структур  $C$  :

(a)  $T \subseteq \text{Th}(\text{Mod}(T))$

(b)  $C \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(C))$

(c)  $[T] = \text{Th}(\text{Mod}(T))$

(d)  $\text{Mod}(\text{Th}(C))$  - наименьший  $\Delta$ -элементарный класс, содержащий  $C$ .

13. Установите биекцию между логически замкнутыми теориями и  $\Delta$ -элементарными классами моделей сигнатуры  $L$ .