

## Листок 7

### Геометрия, 3-й модуль, 2016–2017

1. Проведем касательную гиперплоскость к гладкой квадрике. Покажите, что квадрика, которая высекается исходной квадрикой на этой гиперплоскости, имеет особенность в точке касания.
2. Рассмотрим касательные прямые к данной неособой аффинной квадрике, проходящие через начало координат. Покажите, что точки касания лежат в одной гиперплоскости. Выразите ее уравнение через уравнение квадрики.
3. Составьте уравнение касательной к квадрике  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y = 0$  в начале координат.
4. Найдите точку пересечения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , по которым его пересекает плоскость, параллельная плоскости  $x + y - 2 = 0$ , и определите угол между этими образующими.
5. При каком условии через 4 точки на вещественной аффинной плоскости можно провести параболу? Сколько таких парабол?
6. Найдите границу тени, которую отбрасывает эллипсоид  $x^2/4 + y^2/4 + z^2 = 1$  на плоскость  $z = -1$ , если источник света находится в точке  $(2, 2, 2)$ .
7. Найдите все особые квадрики в семействе

$$t(9x^2 - 8xy - 5y^2 - 14xz + 2yz - 8z^2) + (1 - t)(-x^2 + 5y^2 + 6xz - 10yz - 8z^2) = 0.$$

8. Найдите все аффинные квадрики, проходящие через точки  $(1, 2)$ ,  $(31/22, 4/11)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(3, 4)$  и касающиеся прямой  $y = 0$ .
9. Опишите образ отображения  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$  (вложение Сегре), заданного формулой

$$(a : b, c : d) \mapsto ac : bc : ad : bd.$$

10. (а) Даны две непересекающиеся прямые  $l_1, l_2 \subset \mathbb{P}^3$  и проективный изоморфизм прямых  $i: l_1 \xrightarrow{\sim} l_2$ . Что замечают прямые, проходящие в  $\mathbb{P}^3$  через пары точек  $l_1$  и  $l_2$ , соответствующие друг другу при изоморфизме  $i$ ?
- (б) Какую поверхность замечают прямые, проходящие через три данные взаимно непересекающиеся прямые в  $\mathbb{P}^3$ ? (Указание: пучок плоскостей, проходящих через одну из прямых задает взаимно-однозначное соответствие между точками двух других прямых).
- (в) Сколько прямых пересекает 4 прямые общего положения в 3-мерном проективном пространстве?