

Группы и алгебры Ли II

Семинар 5

1. Вычислите характеры модулей Верма для алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 . Выразите характеры конечномерных неприводимых представлений \mathfrak{sl}_2 через характеры модулей Верма.
2. Вычислите характеры модулей Верма для алгебры Ли \mathfrak{sl}_n .
3. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}_3$, состоящую из всех матриц $(a_{i,j})_{i,j=1}^3$, таких что $a_{i,3} = a_{3,j} = 0$ для всех i, j . Докажите, что $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{gl}_2$. Разложите ограничение присоединённого представления \mathfrak{sl}_3 на \mathfrak{g} на неприводимые компоненты.
4. Докажите, что $\mathfrak{sp}_4 \simeq \mathfrak{so}_5$.
5. Пусть V – четырёхмерное векторное представление \mathfrak{sp}_4 . Докажите, что $\Lambda^2 V$ не является неприводимым. Разложите его на неприводимые компоненты.
6. Найдите все корни для алгебры Ли \mathfrak{sp}_4 .
7. Тот же вопрос для \mathfrak{sp}_{2n} .