ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А.В. Колесников

Содержание

1. Лекция 1 (вводная)

Настоящий курс представляет собой продолжение вводного "элементарного" курса теории вероятностей. Основное содержание курса составляет теория случайных процессов, более точно: построение винеровского процесса (броуновского движения), стохастический анализ и введение в теорию диффузионных процессов. Уделено большое внимание теории слабой сходимости мер, в том числе на бесконечномерных пространствах. Теория конечных марковских цепей представлена выборочно. Теория марковских цепей со счетным числом состояний, а также дискретных цепей с непрерывным временем, в общем виде не рассказывается, представлена в виде отдельных примеров. Некоторые сложные вопросы теории диффузионных процессов (марковские свойства, уравнения Колмогорова, аккуратное доказательство формулы Ито) представлены обзорно.

Предполагается, что слушатель хорошо владеет следующим материалом теории меры и теории вероятностей. Для ознакомления с ним рекомендуются книги [1], [4], [5].

(1) Сигма-алгебры. Определение, примеры, базовые свойства.
(2) Борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$.
(3) Меры. Мера Лебега. Вероятностные пространства.
(4) Измеримые множества. Случайные величины. Интеграл Лебега/математическое ожидание.
(5) Независимость.
(6) Абсолютная непрерывность меры относительно другой меры. Теорема Радона-Никодима.
(7) Характеристические функции (преобразование Фурье).
(8) Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

Вводная лекция данного курса включают в себя материал, необходимый для понимания дальнейшего. Этот материал, как правило, входит в элементарный курс, но часто не усваивается должным образом из-за нехватки времени или предпочтений преподавателя.

1.1. **Многомерные распределения. Гауссовские распределения. Преобразования распределений при отображениях.**

Всюду далее $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство.

Определение 1.1. *(Измеримые отображения) Отображение $F : \Omega \to Y$, где Y — множество, наделенное σ-алгеброй $\mathcal{B}$, называется измеримым ($\mathcal{B}$-измеримым), если $F^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, для любого $B \in \mathcal{B}$.*

Как правило, отображения, которые мы будем рассматривать, будут принимать значения в $\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathbb{R}^n$ всегда будет наделяться борелевской σ-алгеброй. Следовательно, измеримым отображением $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ будет считаться любое отображение со свойством $F^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ для любого борелевского B.

Определение 1.2. *(Образы мер) Каждое измеримое отображением $F : \Omega \to Y$, где Y — множество, наделенное σ-алгеброй $\mathcal{B}$, определяет меру-образ $\mu = P \circ F^{-1}$ на $\mathcal{B}$ по формуле*

$$\mu(A) = P(F^{-1}(A)).$$

Определение 1.3. *Случайным вектором $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется любое измеримое отображение из Ω в $\mathbb{R}^n$. Мера $\mu_\xi = P \circ \xi^{-1}$ называется его распределением.*

Определение 1.4. *Случайный вектор $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется непрерывным, если мера $\mu_\xi = P \circ \xi^{-1}$ обладает плотностью относительно меры Лебега, т.е., существует функция $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая условию $\int \rho \, dx = 1$ и*

$$P(\xi \in B) = \mu_\xi(B) = \int_B \rho \, dx.$$

Определение 1.5. *Маргинальным распределением вектора ξ называется одномерное распределение его i-й компоненты ξ_i*

$$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_i, \cdots, \xi_n)$$

Нетрудно видеть, что i-е маргинальное распределение непрерывного случайного вектора задается формулой

$$P(\xi_i \in B) = \int_{\{x : x_i \in B\}} \rho_\xi \, dx.$$

Существует простой критерий независимости совокупности случайных величин (см. [4]).

Теорема 1.6. *Компоненты $\{\xi_i\}$ случайного вектора ξ являются независимыми в совокупности тогда и только тогда, когда многомерная функция распределения ξ, заданная формулой $F(x) = P(\xi_1 < x_1, \cdots, \xi_i < x_i, \cdots, \xi_n < x_n)$ представляется в виде произведения*

$$F(x) = \prod_{i=1}^n F_i(x_i),$$

где F_i — функция распределения соответствующего маргинального распределения.

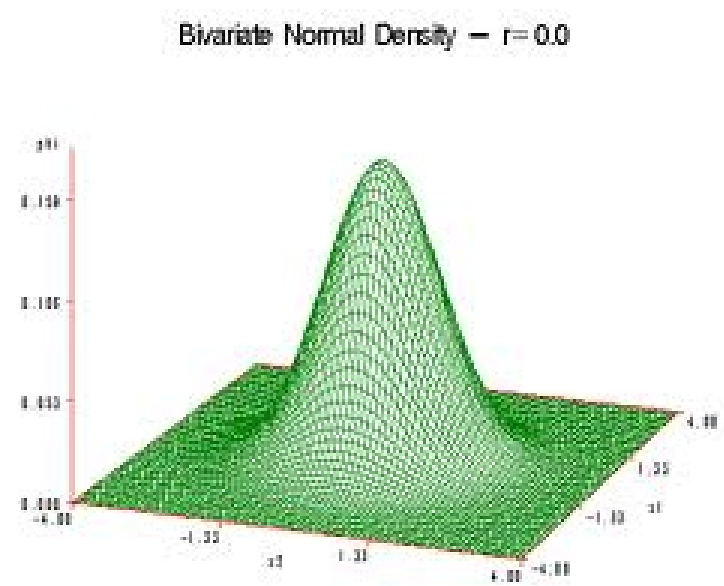
Определение 1.7. *Случайный n-мерный вектор ξ называется гауссовским, если его характеристическая функция*

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, \xi \rangle}), \ t \in \mathbb{R}^n$$

имеет вид

$$\varphi(t) = \exp\Big(i\langle t, a \rangle - \frac{1}{2}\langle At, t \rangle\Big),$$

где $a \in \mathbb{R}^n$ и A — симметричная неотрицательная матрица.



В случае невырожденной матрицы A можно явно указать плотность ξ.

Теорема 1.8. *Если A невырождена, то ξ имеет плотность*

$$f(x) = \sqrt{\frac{\det Q}{(2\pi)^n}} \exp\Big(-\frac{\langle Q(x-a),(x-a)\rangle}{2}\Big),$$

где $Q = A^{-1}$.

Доказательство. Переходя к новому ортогональному базису, можно считать, что Q диагональна. Тогда теорема легко следует из соответствующей одномерной теоремы. □

В общем случае надо приблизить матрицу A по норме невырожденными матрицами и воспользоваться соотношением между слабой сходимостью мер и поточечной сходимостью функционалов (теорема Бохнера).

Теорема 1.9. *Линейный образ гауссовского распределения является гауссовским распределением.*

Определение 1.10. *Ковариационной матрицей случайного вектора ξ называется матрица C, где*

$$C_{ij} = \mathbb{E}\big(\xi_i - \mathbb{E}(\xi_i)\big)\big(\xi_j - \mathbb{E}(\xi_j)\big).$$

Упражнение 1.11. *Докажите, что C симметрична и неотрицательно определена.*

Теорема 1.12. *Для гауссовского случайного вектора $a = \mathbb{E}\xi$ и*

$$C = A.$$

Следствие 1.13. *У гауссовского случайного вектора компоненты независимы тогда и только тогда, когда они некоррелированы (C диагональна).*

Теорема 1.14. *(Свертка) Пусть ξ, η — независимые непрерывные случайные величины с плотностями распределения f_ξ, f_η. Тогда плотность распределения с.в. $\theta = \xi + \eta$ задается формулой свертки*

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t) f_\eta(x-t)\, dt.$$

Пример 1.15. *Распределение χ^2.*

Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые стандартные гауссовские (т.е. $\xi_i \sim \mathcal{N}(0,1)$) случайные величины. Найдем распределение с.в.

$$\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Плотность распределения ξ_1^2 находится из соотношения

$$P(\xi_1^2 \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Дифференцируя по x, получаем

$$f_{\xi_1^2}(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, \ x > 0. \end{cases}$$

Следовательно, по формуле свертки, при $x > 0$

$$f_\eta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x \frac{e^{-\frac{t}{2}}e^{-\frac{(x-t)}{2}}}{\sqrt{t(x-t)}}\,dt = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,dt = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt$$
$$= B\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}.$$

Применяя индукцию, легко доказать что с.в.

$$\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2,$$

где $\xi_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ и все ξ_i независимы, имееет плотность распределения

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, \ x > 0. \end{cases}$$

Это распределение называется распределением χ^2 с n степенями свободы.

Для вычисления формулы плотности для другого классического распределения мы применим следующее простое наблюдение, следующее непосредственно из формулы замены переменной

Теорема 1.16. *Пусть непрерывные случайные векторы ξ и η с плотностями распределения f_ξ, f_η связаны соотношением $F(\eta) = \xi$, где $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм. Тогда выполнено соотношение:*

$$f_\eta = f_\xi(F)|\det DF|.$$

Пример 1.17. *Распределение Стьюдента.*

Найдем распределение с.в.

$$\frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2)}},$$

где $\xi_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ и все ξ_i независимы. Для этого рассмотрим двумерный случайный вектор

$$(X,Y) = \Big(\xi_0, \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2\Big).$$

В силу независимости его плотность распределения задается формулой ($y > 0$)

$$f_{X,Y} = C(n)e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y}{2}}y^{\frac{n}{2}-1}.$$

Пусть (U,V) — случайный вектор, связанный с (X,Y) соотношением

$$U = X, \ V = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}.$$

Очевидно, V имеет искомую плотность распределения. Выразим X, Y через U, V:

$$X = U, \ Y = n\frac{U^2}{V^2}$$

Модуль якобиана этого отображения, как легко проверить, равен

$$\frac{2nU^2}{|V|^3}.$$

По предыдущему предложению вектор (U,V) имеет плотность распределения

$$f_{U,V} = C(n)\exp\Big(-\frac{u^2}{2} - \frac{nu^2}{2v^2}\Big)\frac{|u|^{n-2}}{|v|^{n-2}}\frac{u^2}{|v|^3}.$$

Для того, чтобы получить плотность V , необходимо проинтегрировать полученную функцию по u. Получаем

$$f_V = \frac{C(n)}{|v|^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^n \exp\Bigl(-\frac{(n+v^2)u^2}{2v^2}\Bigr)\, du.$$

Сделав в интеграле замену переменной

$$s = u\frac{\sqrt{n+v^2}}{v},$$

получим, что для некоторой подходящей константы $C(n)$ плотность V равна

$$f_V = \frac{C(n)}{(n+v^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Ниже приведена более точная формулировка (с точной константой).

Следствие 1.18. *Случайная величина*

$$\eta = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2)}}$$

имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы, которое задается плотностью

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(1+\frac{x^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}.$$

1.2. **Различные виды сходимости случайных величин. Равномерная интегрируемость. Лемма Бореля-Кантелли. Закон 0-1.**

Для усвоения материала лекций надо владеть следующими понятиями: сходимость почти наверное (почти всюду), сходимость по вероятности (по мере), в среднем (в $L^p(\mu)$, $p \ge 1$), по распределению (слабая сходимость мер) и знать соотношения между ними (см. [4], глава 2(10)):

сходимость п.н. $\to$ сходимость по вероятности $\to$ сходимость по распределению.

сходимость в среднем $\to$ сходимость по вероятности.

Из сходимости по вероятности не следует сходимости п.н., но верна следующая теорема.

Теорема 1.19. *(Рисс) Из последовательности с.в $\{\xi_n\}$, сходящейся по вероятности, можно выделить почти наверное сходящуюся подпоследовательность.*

Чрезвычайно важными являются следующие теоремы о сходимости под знаком мат. ожидания

Теорема 1.20. *Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность с.в. Тогда*

1) *(Лебег). Если $\xi_n \to \xi$ п.н. и $|\xi_n| < \eta$, $\eta \in L^1(P)$ то*

$$\lim_n \mathbb{E}(\xi_n) = \mathbb{E}(\xi).$$

2) *(Фату). Если $\xi_n \ge \eta$ и $\mathbb{E}(\eta) > -\infty$, то*

$$\underline{\lim}_n \mathbb{E}(\xi_n) \ge \mathbb{E}(\underline{\lim}_n \xi_n).$$

Определение 1.21. *Последовательность с.в. $\{\xi_n\}$ называется равномерно интегрируемой, если*

$$\lim_{N\to+\infty}\sup_i \mathbb{E}(|\xi_i| I_{|\xi_i|\geq N}) = 0.$$

Теорема 1.22. *Пусть $\xi_i \to \xi$ по мере. Если $\{\xi_i\}$ — равномерно интегрируемая последовательность, то имеет место сходимость $\xi_i \to \xi$ в $L^1(P)$.*

Важным техническим средством для доказательства теорем о суммах независимых с.в. является лемма Бореля-Кантелли.

Лемма 1.23. (Борель-Кантелли). *Пусть $\{A_n\}$ — последовательность событий. Событие A состоит в том, что события A_n случаются бесконечно часто*

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\geq n} A_m.$$

1) *Если $\sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) < \infty$, то $P(A) = 0$.*
2) *Если $\sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) = \infty$ и события $\{A_m\}$ независимы, то $P(A) = 1$.*

Доказательство. a) $P(A) \leq \lim_n P(\bigcup_{m\geq n} A_m) \leq \lim_n \sum_{m\geq n} P(A_m) = 0$.

b) В силу независимости $P(\cap_{m=n}^{\infty} A_m^c) = \prod_{m=n}^{\infty}(1 - P(A_m))$. Заметим, что

$$\ln P(\cap_{m=n}^{\infty} A_m^c) = \sum_{m=n}^{\infty} \ln(1 - P(A_m)) \leq -\sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) = -\infty.$$

Следовательно, $P(\cap_{m=n}^{\infty} A_m^c) = 0$. Тогда $0 = P(\cup_{n=1}^{\infty}\cap_{m=n}^{\infty} A_m^c) = P(A^c) = 1 - P(A)$. □

Определение 1.24. *Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность с.в.. Обозначим через $\mathcal{F}^{(n)}$ σ-алгебру, порожденную с.в. $\{\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots\}$. Положим*

$$\mathcal{F}^{\infty} = \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}^{(n)}.$$

Система множеств $\mathcal{F}^{\infty}$ является пересечением σ-алгебр, следовательно, сама является σ-алгеброй.

Пример 1.25. *Следующие события принадлежат $\mathcal{F}^{\infty}$.*

$$\Big\{\overline{\lim}_n \xi_n \leq c\Big\}, \quad \Big\{\frac{S_n}{n} \text{ сходится}\Big\}.$$

Теорема 1.26. (Закон нуля и единицы. А.Н. Колмогоров.) *Пусть $\{\xi_i\}$ — независимые с.в. с $\mathbb{E}\xi_i = 0$. Тогда для любого события $A \in \mathcal{F}^{\infty}$ имеем $P(A) = 0$ либо $P(A) = 1$.*

Доказательство. Так как A принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}^{(n)}$, порожденной $\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots\}$, то A не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_n$, порожденной $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$. Но объединение $\mathcal{F}_n$ порождает всю σ-алгебру цилиндрических множеств. Значит, A не зависит от самого себя. Следовательно $P(A) = P(AA) = P^2(A)$. Отсюда вытекает утверждение теоремы. □

Отсюда следует, что события $\{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \text{ сходится}\}$, $\{\lim_n \xi_n \text{ существует}\}$ имеют вероятность ноль либо единица для независимых с.в. $\{\xi_n\}$.

1.3. **Условное математическое ожидание.** Всюду далее $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, а $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ — σ-алгебра, содержащаяся в $\mathcal{F}$.

Замечание 1.27. *Мы будем считать, что мера P является полной. То есть, если $A \subset B \in \mathcal{F}$ и $P(B) = 0$, то $P(A) = 0$.*

Любое пространство с мерой можно сделать полным, приписав меру ноль всем подмножествам множеств нулевой меры (проверьте, что операция пополнения корректно определена).

Условное математическое ожидание относительно события

Простейшей версией понятия условного математического ожидания является понятие условного математического ожидания относительно события B ненулевой вероятности:

$$\mathbb{E}(\xi|B) = \frac{\mathbb{E}(\xi \cdot I_B)}{P(B)}.$$

Для $\xi = I_A$ математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi|B)$ равно условной вероятности $P(A|B)$.

Несложно проверить следующее свойство :

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi|B_i) P(B_i),$$

если $\{B_i\}$ — разбиение Ω на непересекающиеся множества B_i.

Условное математическое ожидание относительно разбиений

Пусть дано разбиение $\mathcal{B}$ вероятностного пространства Ω на конечное число непересекающихся множеств положительной меры.

$$\Omega = \cup_{i=1}^{n} B_i, \ B_i \cap B_j = \emptyset, \ i \neq j.$$

Условным математическим ожиданием с.в. ξ относительно этого разбиения называется случайная величина

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}(\xi \cdot I_{B_i})}{P(B_i)} I_{B_i}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi|B_i) I_{B_i}(\omega). \tag{1}$$

Замечание 1.28. *Нетрудно проверить следующие свойства условных математических ожиданий*

1)
$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})) = \mathbb{E}\xi.$$

2) *Если $\xi = I_A$, то*
$$\mathbb{E}(I_A|\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) I_{B_i}(\omega)$$

3) *1) + 2) влечет формулу полной вероятности*
$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) P(B_i)$$

4) *Для любого множества B_i*
$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) I_{B_i}) = \mathbb{E}(\xi I_{B_i}).$$

Из свойства 4) следует, что

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})\varphi) = \mathbb{E}(\xi\varphi) \tag{2}$$

для любой функции φ, измеримой относительно разбиения.

Условное математическое ожидание как проекция

Пусть ξ — случайная величина с $\mathbb{E}(\xi^2) < \infty$. Условное математическое ожидание можно характеризовать следующим образом: для любой $\mathcal{B}$-измеримой функции φ

$$\mathbb{E}(\xi - \varphi)^2 \geq \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}))^2,$$

т.е. минимум функционала $\varphi \to \mathbb{E}(\xi - \varphi)^2$ среди $\mathcal{B}$-измеримых функций достигается на $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$.

Действительно,

$$\mathbb{E}(\xi - \varphi)^2 = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}))^2 + 2\mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}))(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) - \varphi)) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) - \varphi)^2$$

В силу свойства (2) среднее слагаемое равно нулю, поэтому

$$\mathbb{E}(\xi - \varphi)^2 = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}))^2 + \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) - \varphi)^2 \geq \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}))^2.$$

Вывод: условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$ является ортогональной (в смысле $L^2(P)$) проекцией на подпространство σ-измеримых случайных величин.

Условное математическое ожидание относительно σ-алгебры.

Пусть ξ — неотрицательная с.в. со свойством $\mathbb{E}|\xi| < \infty$, а $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ — некоторая σ-алгебра, содержащаяся в $\mathcal{F}$.

Определение 1.29. *Случайная величина $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ называется условным математическим ожиданием ξ относительно $\mathcal{B}$, если*

1) $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ *измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$ и* $\mathbb{E}|\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}))| < \infty$
2) *Для любой ограниченной функции φ, измеримой относительно $\mathcal{B}$, выполнено равенство*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})\varphi) = \mathbb{E}(\xi\varphi).$$

Пример 1.30. *Для σ-алгебры $\mathcal{B}$, порожденной конечным (или даже счетным) набором множеств, формула (1) задает условное математическое ожидание относительно $\mathcal{B}$. Это немедленно вытекает из пункта 4) Замечания 1.28 и измеримости функции, заданной формулой (1), относительно $\mathcal{B}$.*

Еще один важный пример вытекает из теоремы Фубини.

Пример 1.31. *Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n$ и $P = \prod_{i=1}^n \mu_i$ — прямое произведение вероятностных мер. Обозначим через $\mathcal{F}_m$ σ-алгебру, порожденную первыми m координатами. Функции, измеримые относительно $\mathcal{F}_m$ — это борелевские функции вида $g(x_1, \cdots, x_m)$. Тогда для любой интегрируемой борелевской функции f*

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_m) = \int f(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)\ d\mu_{m+1}(x_{m+1}) \cdots d\mu_n(x_n).$$

Существование условного математического ожидания

Пусть теперь $\mathcal{B}$ — произвольная σ-алгебра, содержащаяся в $\mathcal{F}$ и ξ — неотрицательная интегрируемая с.в. Рассмотрим меру $\xi \cdot P$. Эта мера абсолютно непрерывна относительно ограничения μ на σ-алгебру $\mathcal{B}$. По теореме Радона-Никодима существует такая интегрируемая функция g, измеримая относительно пополнения $\mathcal{B}$ относительно P,

$$\mathbb{E}(I_A\xi) = \int I_A \cdot \xi\ dP = \int I_A g\ dP = \mathbb{E}(I_A g)$$

для любого множества $A \subset \mathcal{B}$. Выбрав $\mathcal{B}$-измеримую модификацию, мы получим условное математическое ожидание ξ. Произвольную интегрируемую с.в. ξ надо представить в виде $\xi = \xi_+ - \xi_-$ и положить $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(\xi_+|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(\xi_-|\mathcal{B})$.

Теорема 1.32. *Выполнены следующие свойства*

1) *Условное математическое ожидание единственно с точностью до множества меры нуль (относительно сужения P на $\mathcal{B}$!).*
2) $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) = \xi$ *почти наверное (т.е. P-п.в.) для всякой с.в. ξ, измеримой относительно $\mathcal{B}$.*
3) $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) \geq 0$ *п.н. для всякой с.в. ξ, т.ч. $\xi \geq 0$ п.н.*
4) *Для всякой ограниченной $\mathcal{B}$-измеримой g*

$$\mathbb{E}(\xi \cdot g|\mathcal{B}) = g\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}).$$

Условные меры

В общем случае условное математическое ожидание не обладает явным представлением. Тем не менее, мы разберем важный пример, когда его можно вычислить явно.

Пусть $P = \rho(x,y)\ dxdy$ — вероятностная мера на $\mathbb{R}^2$ с положительной борелевской плотностью. Рассмотрим σ-алгебру $\mathcal{B}_x$, порожденную координатной функцией x. Пусть P_x — проекция (маргинальное распределение) P на ось Ox:

$$P_x(A) = \int_{\mathbb{R}^2} I_A(x)\rho(x,y)\ dxdy.$$

Она имеет плотность $\rho_x(x)$:

$$\rho_x(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x,y)\ dy.$$

Условной мерой P^x для каждого фиксированного x является вероятностная мера на прямой l_x, проходящей ортогонально Ox через точку $(x,0)$, заданная плотностью

$$P^x = \rho^x(y)dy = \frac{\rho(x,y)}{\rho_x(y)} \cdot dy = \frac{\rho(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} \rho(x,y)dy} \cdot dy.$$

Очевидно, P^x — вероятностная мера.

Мера P восстанавливается по проекции и набору условных мер

$$P(dx\ dy) = \int P^x(dy) \oplus P_x(dx).$$

Последнее равенство означает, что для любой интегрируемой функции φ выполнено соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)P(dx\ dy) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)P^x(dy) \Big)\ P_x(dx).$$

Условное математическое ожидание функции ξ относительно $\mathcal{B}_x$ оказывается равным интегралу по условной мере и задается формулой

$$g(x) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}_x) = \int \xi(x,y)\rho^x(y)dy = \frac{\int \xi(x,y)\rho(x,y)\ dy}{\int \rho(x,y)\ dy}.$$

Действительно, эта функция $\mathcal{B}_x$-измерима (точнее, измерима относительно пополнения $\mathcal{B}_x$ по мере Лебега). Для функции $\varphi(x)$, зависящей только от x, имеем (по теореме Фубини)

$$\mathbb{E}(g\varphi) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) \frac{\int_{\mathbb{R}} \xi(x,y)\rho(x,y)\ dy}{\int_{\mathbb{R}} \rho(x,y)\ dy} \rho(x,y)\ dxdy\ = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \frac{\int_{\mathbb{R}} \xi(x,y)\rho(x,y)\ dy}{\int_{\mathbb{R}} \rho(x,y)\ dy}\ \rho(x,y) dy \Big) dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \Big(\varphi(x) \frac{\int_{\mathbb{R}} \xi(x,y)\rho(x,y)\ dy}{\int_{\mathbb{R}} \rho(x,y)\ dy} \int_{\mathbb{R}} \rho(x,y) dy \Big) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} \xi(x,y)\rho(x,y)\ dy\ dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\xi(x,y)\rho(x,y)\ dxdy = \mathbb{E}(\xi\varphi).$$

2. Лекция 2. Марковские цепи

2.1. **Базовые сведения.** Настоящая лекция имеет также обзорный характер, поскольку в ней представлены базовые сведения о марковских цепях, с которыми большинство слушателей, как правило, знакомо. Речь будет идти в основном об однородных конечных цепях.

Определение 2.1. *Последовательность случайных величин $\{X_n\}$, $n \geq 0$ со значениями в некотором не более чем счетном множестве S (множестве состояний) называется (однородной) марковской цепью, если для любых значений $k_i \in S$ выполнено соотношение*

$$P(X_{n+1} = k | X_0 = k_0, \cdots, X_n = k_n) = P(X_{n+1} = k | X_n = k_n) = P(X_1 = k | X_0 = k_n)$$

(будущее зависит от прошлого через настоящее).

Пример 2.2. *Пусть $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, где $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых бернуллиевских с.в. Тогда $\{X_n\}$ — марковская цепь. Действительно,*

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k | X_0 = k_0, \cdots, X_n = k_n) &= P(X_{n+1} - X_n = k - k_n | X_0 = k_0, \cdots, X_n = k_n) \\ &= P(X_{n+1} - X_n = k - k_n) = P(\xi_i = k - k_n) = P(X_1 = k | X_0 = k_n). \end{aligned}$$

Замечание 2.3. *Почти везде ниже мы будем считать, что S конечно : $|S| = d < \infty$.*

Величина

$$p_{ik} = P(X_1 = k | X_0 = i)$$

называется переходной вероятностью. Ее можно интерпретировать как вероятность перехода цепи из состояния i в состояние k за единицу времени. Матрица P: $(P)_{ik} = p_{ik}$ называется матрицей перехода. Очевидно следующее свойство:

$$\sum_{k \in S} p_{ik} = 1.$$

Из определения марковской цепи видно, что распределение X_n полностью определяется X_0 и матрицей P.

Пример 2.4. *Простейший пример: марковская цепь с двумя состояниями, матрица перехода которой задается так:*

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

где $0 < \alpha, \beta < 1$.

Часто марковскую цепь удобно изображать в виде графа, где состояния соединены направленными стрелками (направление стрелки от состояния i к состоянию k соответствуют вероятности p_{ik}).

Упражнение 2.5. *([3], пример 1.1.2). Изобразите граф, соответствующий матрице перехода*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 2.6. *Докажите, что*

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

Предположим теперь, что распределение с.в. X_0 задано вектором (строкой) λ:

$$P(X_0 = i) = \lambda_i,\ \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$$

Тогда, как нетрудно видеть

$$P(X_1 = k) = \sum_{i \in S} P(X_1 = k | X_0 = i) P(X_0 = i) = \sum_{i \in S} \lambda_i p_{ik}.$$

Т.е., распределение вероятностей с.в. X_1 задается вектором

$$\lambda P$$

(умножение происходит слева!). Рассуждая по индукции, мы приходим к выводу, что распределение X_n задается вектором

$$\lambda P^n.$$

Пример 2.7. *([3], пример 1.16.18) Блоха прыгает по вершинам треугольника, перепрыгивая на одну из свободных вершин с вероятностью $1/2$. Найти вероятность, что через n прыжков она окажется на месте старта.*

Матрица переходных вероятностей равна

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Искомая вероятность равна диагональному элементу матрицы P^n. С помощью системы собственных векторов матрицы P найдите P^n и докажите, что искомая вероятность равна $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Упражнение 2.6 обобщается следующим образом.

Теорема 2.8.

$$P(X_{k_1} = i_1, \cdots, X_{k_n} = i_n) = (\lambda P^{k_1})_{i_1} (P^{k_2 - k_1})_{i_1 i_2} \cdots (P^{k_n - k_{n-1}})_{i_{n-1} i_n}.$$

2.2. **Регулярность.**

Определение 2.9. *Марковская цепь называется регулярной, если существует такое n_0, что $(P^{n_0})_{ij} > 0$ для любых $i, j \in S$.*

Определение 2.10. *Марковская цепь называется неприводимой, если для любых $i, j \in S$ существует такое n_0, что $(P^{n_0})_{ij} > 0$.*

Пример 2.11. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *цепь регулярна для* P *и приводима и нерегулярна для* Q.

Определение 2.12. *Для состояний* $i \neq k$ *обозначим через* T_{ik} *первый момент достижения* k *для цепи, стартовавшей из* i: $T_{ik} = \min\{n \geq 0 : X_n = k | X_0 = i\}$, *а через* $\mu_{ik} = \mathbb{E}T_{ik}$ *— среднее время достижения* k.

Для состояния i *обозначим через* T_i *первый момент возвращения в* i *для цепи, стартовавшей из* i: $T_i = \min\{n > 0 : X_n = i | X_0 = i\}$, *а через* $\mu_i = \mathbb{E}T_i$ *— среднее время возвращения в* i.

Нетрудно придумать примеры, когда $P(T_{ik} = \infty) > 0$ ([8], пример 9.3.6). Такая ситуация осуществима, например, благодаря так называемым поглощающим состояниям. Тем не менее, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.13. *([8], теорема 9.3.15). Если цепь регулярна, то* T_{ik} *имеет конечное среднее. Более того,* $P(T_{ik} > n) \leq c\lambda^n$ *для некоторых констант* $c > 0, \lambda < 1$.

Упражнение 2.14. *([3], пример 1.3.6.) Лягушка прыгает вверх по лестнице из* N *ступеней. При прыжке с подножия лестницы (нулевая ступень) она с вероятностью* $\beta >$ *оказывается на первой ступени, а с вероятностью* $1 - \beta$ *остается на месте. После прыжка на других ступенях она с вероятностью* $\alpha > 0$ *оказывается на ступень выше, с вероятностью* α *на ступень ниже, с вероятностью* $1 - 2\alpha$ *остается на месте. Докажите, что среднее количество прыжков, которое она совершит, прежде чем достигнет лестницы, равно* $\frac{N(N-1)}{2\alpha} + \frac{N}{\beta}$.

В дальнейшем нам понадобится следующая версия *сильного марковского свойства*

Теорема 2.15. *(Сильное марковское свойство) Пусть* T *— первый момент достижения цепью состояния* d. *Выполнено следующее соотношение:*

$$P(X_{T+m} = k | X_r = x_r,\ 1 \leq r \leq T,\ X_T = d) = (P^m)_{dk}$$

для $x_r \neq d$.

Доказательство. Обозначим событие $\{X_r = x_r,\ 0 \leq r < T\}$ через $A(T)$. Тогда

$$P(X_{T+m} = k | X_r = x_r,\ 0 \leq r \leq T,\ X_T = d) = \frac{P(X_{T+m} = k, A(T), X_T = d)}{P(A(T), X_T = d)}.$$

$$P(X_{T+m} = k, A(T), X_T = d) = \sum_{t=1}^{\infty} P(X_{t+m} = k, A(t), T = t, X_t = d)$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} P(X_{t+m} = k | A(t), T = t, X_t = d) P(A(t), T = t, X_t = d) = \sum_{t=1}^{\infty} (P^m)_{dk} P(A(t), T = t, X_t = d)$$

$$= (P^m)_{dk} P(A(T), X_T = d).$$

□

2.3. **Существование и единственность инвариантных распределений.**

Определение 2.16. *Вероятностное распределение* $\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_d))$ *на* S *называется* **инвариантным** *или* **стационарным** *относительно цепи* $\{X_n\}$, *если* $\pi P = \pi$, *где* P *— соответствующая матрица перехода.*

Упражнение 2.17. *Найдите инвариантные распределения для* $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$.

Теорема 2.18. *Конечная марковская цепь обладает инвариантным распределением* π *(вообще говоря, неединственным).*

Теорема вытекает из теоремы о неподвижной точке. Доказательство остается в качестве упражнения.

Для конечной регулярной марковской цепи рассмотрим произвольное состояние $s \in S$. Предположим, что $X_0 = s$. Пусть $\rho_k(s)$ — среднее число посещений состояния k между возвращением в состояние s (считаем, что $\rho_s(s) = 1$).

Теорема 2.19. *Мера* $\pi_k = \frac{\rho_k(s)}{\mu_s}$ *— инвариантная*

Доказательство. Здесь $\mu_s = \mathbb{E}T_s$ — среднее время возвращения в состояние s.

Зафиксируем $k \in S, k \neq s$. Пусть $I_n = \{X_n = k, X_i \neq s, 0 < i \leq n\} = \{X_n = k, T_s \geq n\}$. Общее число посещений k до возвращения в s равно

$$R_k = \sum_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Очевидно, время возвращения в s равно

$$T_s = 1 + \sum_{k \neq s} R_k.$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей.

$$\mu_s = \sum_{k \in S} \rho_k(s).$$

По определению $\rho_k(s)$:

$$\rho_k(s) = \mathbb{E}R_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}I_n = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = k, T_s \geq n).$$

Очевидно, для $n = 1$ имеем: $P(X_1 = k, T_s \geq 1) = p_{sk}$. Для $n \geq 2$

$$P(X_n = k, T_s \geq n) = \sum_{j \neq s} P(X_n = k, X_{n-1} = j, T_s \geq n-1) =$$

$$= \sum_{j \neq s} P(X_n = k | X_{n-1} = j, T_s \geq n-1) P(X_{n-1} = j, T_s \geq n-1).$$

В силу сильного марковского свойства последнее выражение равно $\sum_{j \neq s} p_{jk} P(X_{n-1} = j, T_s \geq n-1)$. Отсюда следует, что

$$\rho_k(s) = p_{sk} + \sum_{j \neq s} p_{jk} \rho_j(s) = \sum_j p_{jk} \rho_j(s).$$

Разделив выражение на μ_s, получаем инвариантность π. □

Теорема 2.20. *Для регулярной марковской цепи инвариантное распределение* π *единственно, причем*

$$\pi_s = \frac{1}{\mu_s},$$

Доказательство. Напомним, что $T_{ik} = \min\{n \geq 0, X_n = k | X_0 = i\}$ ($T_{kk} = 0, \mu_{kk} = 0$), $\mu_{ik} = \mathbb{E} T_{ik}$. Для $i \neq k$ в силу марковского свойства

$$\mu_{ik} = \sum_j p_{ij}(1 + \mu_{jk}) = 1 + \sum_j p_{ij}\mu_{jk}.$$

Аналогично, для времени возвращения

$$\mu_k = 1 + \sum_j p_{kj}\mu_{jk}.$$

Следовательно

$$\mu_{ik} + \delta_{ik}\mu_k = 1 + \sum_j p_{ij}\mu_{jk}$$

Тогда

$$\sum_i \pi_i \mu_{ik} + \sum_i \pi_i \delta_{ik}\mu_k = 1 + \sum_i \sum_j \pi_i p_{ij}\mu_{jk}.$$

В силу инвариантности последнее слагаемое равно $\sum_i \pi_i \mu_{ik}$. Таким образом $1 = \sum_i \pi_i \delta_{ik}\mu_k = \pi_k \mu_k$. □

2.4. **Эргодичность.** Замечательным обстоятельством является тот факт, что при весьма общих обстоятельствах при больших значениях n наблюдается сходимость процесса к инвариантному распределению (эргодичность).

Теорема 2.21. *Предположим, что существует предел $\Pi_{ij} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)$. Тогда каждая строка $\pi^{(i)}$ матрицы Π задает инвариантное распределение.*

Доказательство.

$$(\pi^{(i)}P)_j = \sum_l \pi_{il}p_{lj} = \lim_n \sum_l p_{il}^{(n)} p_{lj} = \lim_n p_{ij}^{(n+1)} = (\pi^{(i)})_j.$$

□

Теорема 2.22. (Эргодическая теорема). *Пусть $\{X_n\}$ — регулярная марковская цепь. Для любых i, k существует предел $\pi_k = \lim_{n\to\infty} p_{ik}(n)$. При этом $\pi = (\pi_0, \cdots, \pi_d)$ является инвариантным распределением.*

Доказательство. ([4], 1.12). Положим

$$m_j^{(n)} = \min_i (P^n)_{ij}, \;\; M_j^{(n)} = \min_i (P^n)_{ij}.$$

Заметим, что $m_j^{(n)}$ — неубывающая по n последовательность. Действительно

$$m_j^{(n+1)} = \min_i (P^{(n+1)})_{ij} = \min_i \sum_k p_{ik}(P^n)_{kj} \geq \min_i \sum_k p_{ik} \min_k (P^n)_{kj} = \min_i \sum_k p_{ik} m_j^{(n)} = m_j^{(n)}.$$

Аналогично $M_j^{(n)}$ — невозрастающая по n последовательность.

Достаточно доказать, что $M_j^{(n)} - m_j^{(n)}$ сходится к нулю. Пусть $\varepsilon = \min_{i,j}(P^{n_0})_{ij} > 0$.

$$\begin{aligned}(P^{n_0+n})_{ij} &= \sum_k (P^{n_0})_{ik}(P^n)_{kj} = \sum_k [(P^{n_0})_{ik} - \varepsilon(P^n)_{jk}](P^n)_{kj} + \varepsilon \sum_k (P^n)_{kj}(P^n)_{jk} \\ &= \sum_k [(P^{n_0})_{ik} - \varepsilon(P^n)_{jk}](P^n)_{kj} + \varepsilon P_{jj}^{(2n)}.\end{aligned}$$

В силу того, что $(P^{n_0})_{ik} - \varepsilon(P^n)_{jk} \geq 0$, получаем

$$(P^{n_0+n})_{ij} \geq \min_k (P^n)_{kj} \sum_k [(P^{n_0})_{ik} - \varepsilon(P^n)_{jk}] + \varepsilon P_{jj}^{(2n)} = (1-\varepsilon) m_j^{(n)} + \varepsilon P_{jj}^{(2n)}.$$

Следовательно

$$m_j^{(n+n_0)} \geq (1-\varepsilon) m_j^{(n)} + \varepsilon P_{jj}^{(2n)}.$$

Аналогично $M_j^{(n+n_0)} \leq (1-\varepsilon) M_j^{(n)} + \varepsilon P_{jj}^{(2n)}$. Следовательно

$$M_j^{(n+n_0)} - m_j^{(n+n_0)} \leq (1-\varepsilon)(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}).$$

Отсюда следует утверждение теоремы (почему?). □

3. Лекция 3. Случайное блуждание. Комбинаторные задачи. Возвратность.

3.1. **Подсчет числа путей. Принцип отражения.** Материал: [7] (3.10).

(Несимметричное) случайное блуждание, стартующее их точки a.

$$S_n = a + X_1 + \ldots + X_n,$$

X_i — последовательность независимых случайных величин, принимающих значение -1 с вероятностью $0 < q < 1$ и значение 1 с вероятностью $p = 1 - q$.

Пусть $N_n(a,b)$ — число всевозможных путей со свойством $S_0 = a, S_n = b$, а $N_n^0(a,b)$ — число тех из них, которые содержат точку $(k,0)$ на оси x .

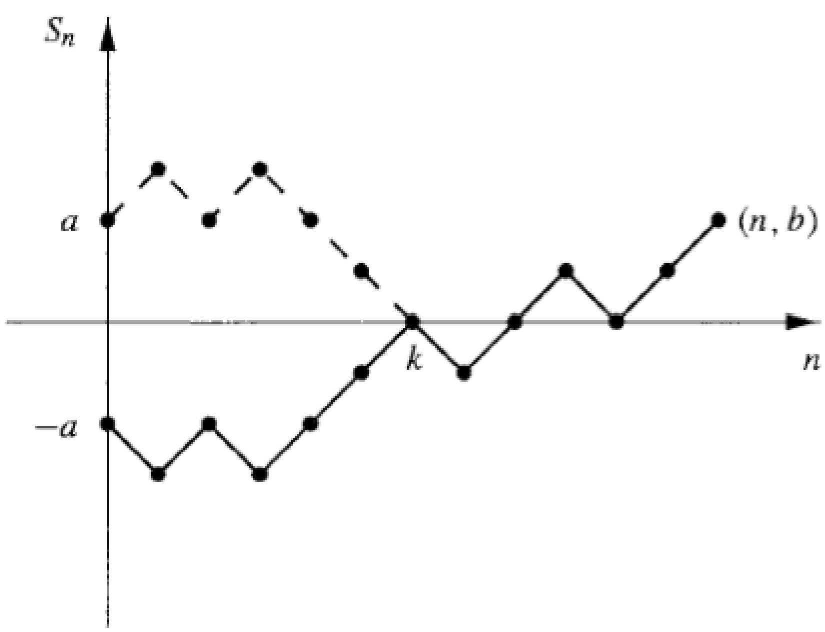
Упражнение 3.1. *Докажите, что*

$$N_n(a,b) = C_n^{\frac{1}{2}(n+b-a))},$$

если множество путей со свойством $S_0 = a, S_n = b$ непусто.

Теорема 3.2. (Принцип отражения) *Пусть $a, b > 0$. Тогда $N_n^0(a,b) = N_n(-a,b)$.*

Теорема доказывается путем установления взаимно однозначного соответствия между двумя множествами путей (см. рисунок).



3.2. **Распределение максимума случайного блуждания. Вероятность возвращения для одномерного (несимметричного) случайного блуждания.**

Теорема 3.3. *Пусть $S_0 = 0$, $M_n = \max_{0\le r\le n} S_r$. Тогда для любого $r \geq 1$*

$$P(M_n \geq r, S_n = b) = P(S_n = b),$$

если $b \geq r$ и

$$P(M_n \geq r, S_n = b) = (q/p)^{r-b} P(S_n = 2r - b),$$

если $b < r$.

Доказательство. Случай $b \geq r$ очевиден. Пусть $b \leq r$. Воспользуемся принципом отражения. Найдем первую точку τ_r, в которой S достигает уровня $r : S_{\tau_r} = r$. Сопоставим пути S_n отраженный путь $\tilde{S}_n$: $S_n = \tilde{S}_n$, если $n \leq \tau_r$ и $\tilde{S}_n = 2r - S_n$, если $n \geq \tau_r$. Нетрудно видеть, что таким способом задается взаимно однозначное соотношение между путями, оканчивающими в $2r - b$ и путями, оканчивающимися в b и максимумом $\geq r$. Убедитесь, что вероятность задается искомой формулой. □

Упражнение 3.4. *Докажите, что в симметричном случае $p = q = 1/2$*

$$P(M_n \geq r) = 2P(S_n \geq r + 1) + P(S_n = r).$$

Теорема 3.5. *Вероятность $P(S_n = 0, \text{для некоторого } n > 1 \; |S_0 = 0)$ того, что случайное блуждание вернется в точку старта равно $1 - |p - q]$. В частности, одномерное симметричное случайное блуждание возвратно.*

Доказательство. Найдем $P(S_{2n=0}, S_i \neq 0, 0 < i < 2n)$. Эта вероятность равна

$$P(S_1 = 1, S_i \neq 0, S_{2n-1} = 1, 2 \leq i \leq 2n-2) + P(S_1 = -1, S_i \neq 0, S_{2n-1} = -1, 2 \leq i \leq 2n-2).$$

Применяя принцип отражения, получаем:

$$P(S_1 = 1, S_i \neq 0, S_{2n-1} = 1, 2 \leq i \leq 2n - 2) = pqP(S_{2n-2} = 1, S_i \neq 0, 1 \leq i \leq 2n - 2|S_0 = 1)$$
$$= pq\Big(P(S_{2n-2} = 1|S_0 = 1) - P(S_{2n-2} = 1, \exists i : 1 \leq i \leq 2n - 2, S_i = 0|S_0 = 1)\Big)$$
$$= pq\Big((pq)^{n-1}C^{n-1}_{2n-2} - (pq)^{n-1}N^0_{2n-2}(1, 1)\Big) = (pq)^n\Big(C^{n-1}_{2n-2} - N_{2n-2}(1, -1)\Big)$$
$$= (pq)^n\Big(C^{n-1}_{2n-2} - C^{n-2}_{2n-2}\Big)$$
$$= (pq)^n(2n - 2)!\Big(\frac{1}{((n-1)!)^2} - \frac{1}{n!(n-2)!}\Big) = (pq)^n \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-2)!}\Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big)$$
$$= (pq)^n \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{p^n q^n}{2n-1} C^n_{2n-1}.$$

Аналогичная формула имеет место для $P(S_1 = -1, S_i \neq 0, S_{2n-1} = -1, 2 \leq i \leq 2n-2)$. Итак

$$P(S_{2n=0}, S_i \neq 0, 0 < i < 2n) = \frac{2p^n q^n}{2n-1} C^n_{2n-1}.$$

Таким образом

$$P(S_i \neq 0, i > 0|S_0 = 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2p^n q^n}{2n-1} C^n_{2n-1}.$$

Упражнение: проверьте, что если $|x| < 1$, то

$$1 - \sqrt{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\Big(\frac{x}{4}\Big)^n \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$$

Отсюда вытекает, что $P(S_{2n=0}, S_i \neq 0, 0 < i < 2n) = 1 - \sqrt{1-4qp} = 1 - |p-q|$. $\square$

3.3. **Возвратность двумерного случайного блуждания. Невозвратность трехмерного случайного блуждания.** Материал: [3].

Мы обсудим общий способ доказательства возвратности/невозвратности состояния марковской цепи со счетным числом состояний.

Пусть цепь X_n стартует из состояния x_0. Положим

$$I_k = \{\omega : X_n(\omega) = x_0, n > 1 \text{ хотя бы для } k \text{ значений } n\}.$$

Из сильного марковского свойства вытекает

$$P(I_k) = (P(I_1))^k$$

(проверьте!). Отсюда сразу следует, что вероятность возвращения бесконечное число раз равна $\lim_k (P(I_1))^k$, т.е. 1, если $P(I_1) = 1$ (состояние возвратно) или 0, если $P(I_1) < 1$ (состояние невозвратно).

Пусть $J_n = I_{X_n = x_0}$. Тогда случйаная величина V, равная общему числу возвращений равна

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} J_n.$$

Поэтому

$$\mathbb{E}V = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n_{x_0 x_0}.$$

С другой стороны

$$\mathbb{E}V = \sum_{n=0}^{\infty} P(V > n) = \sum_{n=0} (P(I_1))^{n+1}.$$

Таким образом невозвратность эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=0} (P(I_1))^{n+1}$, что в свою очередь эквивалентно сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} P^n_{x_0 x_0}$.

Упражнение 3.6. *Пользуясь этим признаком, докажите возвратность симметричного одномерного случайного блуждания и невозвратность несимметричного.*

Теорема 3.7. *Двумерное симметричное случайное блуждание возвратно, а трехмерное симметричное случайное блуждание невозвратно.*

Список литературы

[1] Богачев В.И., Основы теории меры, тт. 1-2, Москва-Ижевск, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2006.
[2] Вентцель А.Д., Курс теории случайных процессов. М. Наука, 1975.
[3] Кельберт М.Я., Сухов Ю.М.. Вероятность и статистика в примерах и задачах. 2-й том, МЦНМО 2009.
[4] Ширяев А.Н., Вероятность. тт. 1-2. М. МЦНМО, 2007.
[5] Ширяев А.Н., Задачи по теории вероятностей. М. МЦНМО, 2006.
[6] Grimmet G., Stirzaker D., One thousand exercises in probability, Oxford University Press, 2001.
[7] Grimmet G., Stirzacker D., Probability and random processes.Oxford University Press, 2001.
[8] Stirzaker D., Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.