

## ЛИСТОК 10. ИНТЕГРАЛЫ

АНАЛИЗ, 1 КУРС, 07.03.2017

10◇1 Посчитать интегралы (обязательная задача!):  $\int \frac{x dx}{x^2 - 3x + 2}$ ,  $\int \frac{x dx}{x^2 + 2x + 5}$ ,

$$\int e^{|x|} dx, \int \frac{e^{3x} dx}{e^x + 1}, \int \frac{(2-x)^2 dx}{2-x^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \int \frac{dx}{1+\sin x}, \int \operatorname{tg}^2 x dx$$

10◇2 В параболическую тарелку (параболоид вращения в  $\mathbb{R}^3$  с вертикальной осью) высоты  $h$  и радиуса  $R$  подали обед. Сколько супа в неё влезет?

10◇3 По трубе радиуса  $R$  течёт нефть, причём скорость течения растёт прямо пропорционально расстоянию от стенки трубы, достигая максимального значения  $v_0$  м/сек в середине трубы. Какова пропускная способность этой трубы?

10◇4 Момент вращения отрезка  $I = [0, 1]$  с непостоянной плотностью  $p(x) = x^s$  (где  $s > 0$ ) относительно точки  $a \in \mathbb{R}$  вычисляется по формуле  $J_a = \int_0^1 p(x)(x-a)^2 dx$ . Найдите минимальное значение момента вращения  $J_a$  и соответствующую точку  $a^*$ .

10◇5 Винт вертолёт, взлетающего с постоянной скоростью  $v$ , вращается с постоянной угловой скоростью  $w$ . По лопасти винта от его оси бежит колорадский жук с постоянной скоростью  $u$ . Найдите длину траектории колорадского жука за один полный оборот винта вертолёт, если в начальный момент времени он сидел на оси винта.

10◇6 Найдите работу силы Архимеда при погружении золотого шара радиуса  $R$  в ванну с водой до середины шара. (Примечание: Требуется работа, а не сила!)

10◇7 Определите силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса  $\rho$ , диаметр которого находится на поверхности воды.

10◇8 Циклоидой называется траектория фиксированной точки на окружности радиуса  $R$  катящейся без скольжения по прямой. Найдите параметризацию циклоиды и длину её дуги, отвечающей полному обороту окружности.

10◇9 Цилиндр диаметра 20 см и длины 80 см заполнен паром под давлением 10 кг/см<sup>2</sup>. Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объём пара в два раза, считая, что температура пара остаётся постоянной?

10◇10 Бокал в форме поверхности вращения радиуса  $R(z) = z^{2/3}$  на высоте  $z$  ото дна наполняют из постепенно иссякаемого источника, скорость истечения из которого равна  $e^{-t} \cos^2 t$ . До какой высоты  $H$  сможет наполниться бокал?

10◇11 Докажите вторую теорему Гульдена: объём тела, образованного вращением плоской фигуры  $S$  вокруг не пересекающей её оси, расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади фигуры  $S$  на длину окружности, описываемой центром тяжести этой фигуры.