

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2017
ЛИСТОК 3

срок сдачи 21.03.2017

1. Докажите, что если функция f имеет полюс в z_0 и голоморфна в её проколотой окрестности, то z_0 существенно особая точка функции e^f .

2. Каков может быть тип особой точки функции f если в её проколотой окрестности f голоморфна и выполняется $\operatorname{Im} f(z) > 0$?

3. Покажите, что если $|f(z)| < \sqrt{|z|} + \frac{1}{\sqrt{|z|}}$ и $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus 0$, то $f \equiv \text{const}$.

4. Найдите вычет ($n \in \mathbb{N}$)
$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{dz}{(1 - e^{-z})^n}$$

5. Вычислите интегралы, используя вычеты

а)
$$\oint_{|z|=10} \frac{dz}{\sin^2 z \cos z}$$

б)
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2}, \quad a > b > 0$$

в)
$$\int_0^\infty \frac{x \sin tx}{x^2 + t^2} dx, \quad t > 0$$

г)
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2 + t^2)} dx$$

6. Производной Шварца функции $w(z)$ называется выражение

$$S(w; z) = \frac{w'''(z)}{w'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{w''(z)}{w'(z)} \right)^2$$

а) Покажите, что если f, g два линейно независимых решения уравнения $y'' + Q(z)y = 0$, то уравнением с множеством решений $w = \frac{af+bg}{cf+dg}$ с произвольными $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ является $S(w; z) = 2Q(z)$.

б) Покажите, что $S(w; z) = 0 \Leftrightarrow w(z)$ -дробно-линейная функция

в) Покажите, что

$$S(w; z) = 6 \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta} \ln \frac{w(z) - w(\zeta)}{z - \zeta}$$

г) Покажите, что если $w(z)$ и $z(w)$ взаимно-обратные функции, то

$$S(w; z) + S(z; w) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = 0$$

д) Покажите, что если $w(z)$ и $f(w)$ голоморфные функции и $F(z) = f(w(z))$, то

$$S(F; z) = S(F; w) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + S(w; z)$$