Группы и алгебры Ли II

Семинар 6

1. Вычислите характеры модулей Верма для алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Выразите характеры конечномерных неприводимых представлений $\mathfrak{sl}_2$ через характеры модулей Верма.

2. Вычислите характеры модулей Верма для алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$.

3. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}_3$, состоящую из всех матриц $(a_{i,j})_{i,j=1}^3$, таких что $a_{i,3} = a_{3,j} = 0$ для всех i, j. Докажите, что $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}_2$. Разложите ограничение присоединённого представления $\mathfrak{sl}_3$ на $\mathfrak{g}$ на неприводимые компоненты.

4. Докажите, что SL_2 орбита прямой, содержащей старший вектор, в проективизации неприводимого $(n+1)$-мерного представления SL_2 индуцирует вложение $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Образ этого вложения называется рациональной нормальной кривой (кривая Веронезе).

5. Докажите, что в подходящих координатах рациональная нормальная кривая состоит из всех точек вида $(x^n : x^{n-1}y : \cdots : y^n)$, $x, y \in \mathbb{C}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

6. Докажите, что рациональная нормальная кривая в $\mathbb{CP}^n$ может быть описана как множество точек $(Z_0 : \cdots : Z_n)$, таких что матрица

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 & Z_2 & \dots & Z_{n-1} \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & \dots & Z_n \end{pmatrix}$$

имеет ранг один.

7*. Докажите, что если однородный полином $f(Z_0, \dots, Z_n)$ зануляется во всех точках рациональной нормальной кривой, то он лежит в идеале, порождённом всеми 2×2 минорами матрицы из задачи 6.