Преобразование Стильтьеса.

Пусть $F_\xi(x)$ — ф-я распределения.

Преобразование Стильтьеса.

$$S_\xi(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, dF_\xi(\lambda) \qquad z \in \mathbb{C} / \operatorname{Supp}(F_\xi(x))$$

Обратное преобразование:

Теорема 2.1.

Пусть x — точка непрерывности $F_\xi(x)$.

Тогда

$$F_\xi(x) = \pm \lim_{y \to 0^+} \int_{-\infty}^{x} \operatorname{Im}(S_\xi(z \pm iy))\, dz$$

Док-во:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{Im}(S_\xi(z+iy))\, dz =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_a^b \int_R \left(\frac{1}{\lambda - (z+iy)} - \frac{1}{\lambda - (z-iy)} \right) \frac{1}{2i}\, dF_\xi(\lambda)\, dz = \frac{1}{\pi} \int_a^b \int_R \frac{y\, dz}{(\lambda - z)^2 + y^2}\, dF_\xi(\lambda)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_R \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{b-\lambda}{y}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{a-\lambda}{y}\right) \right) dF_\xi(x) \xrightarrow[y \to 0^+]{} F(b) - F(a)$$

$$\lim_{y \to +0} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) = \pi\theta(x)$$

□

Св-ва преобразования Стильтьеса:

Теорема 2.2

Пусть $S_\xi(x)$ — пр. Стильтьеса сл.в. ξ.

1) $S_\xi(x)$ — аналитична в $\mathbb{C}^+$

2) $\operatorname{Im} z > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} S_\xi(z) > 0$, $|S_\xi(z)| \le \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$ и

$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{S_\xi(z)}\right) \le -\operatorname{Im}(z)$

3) $F(-0) = 0 \Rightarrow S_\xi(z)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ и

$\operatorname{Im}(z) > 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(z S_\xi(z)) > 0$ и

$$|S_\xi(z)| \le \begin{cases} \frac{1}{|\operatorname{Im}(z)|}, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ \frac{1}{z}, & z < 0 \\ \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \mathbb{R}^+)}, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \end{cases}.$$

Обратное утверждение.

Пусть $S(z)$ – ф-я аналитическая в $\mathbb{C}^+$, такая что $\operatorname{Im} S(z) \ge 0$ для $\forall z \in \mathbb{C}^+$ и

$$\lim_{y \to \infty} iy\, m(iy) = 1,$$

то $S(z)$ – преобразование Стильтьеса ф-ии распределения F:

$$F(b) - F(a) = \lim_{y \to +0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{Im}(S(x+iy))\,dx.$$

Более того, если $zS(z) \in \mathbb{C}^+$ для $z \in \mathbb{C}^+$, то $F(0^-) = 0$ и m можно продолжить на $\mathbb{C}/\mathbb{R}^+$

Пусть $F_\xi(z)$ имеет компактный носитель $\operatorname{supp} F_\xi = [a, b]$ $0 < a < b < \infty$, то для $|z| > b$

$$S_\xi(z) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(\xi^n)}{z^n}$$ – произв. ф-я моментов.

Такие же утверждения относительно нижней полуплоскости можно делать, пользуясь соотношением

$$\overline{S_\xi(z)} = S_\xi(\bar{z}).$$

Преобразование Стильтьеса – удобный инструмент доказательства сходимостей вероятностных мер.

<u>Опред.</u> Пусть μ_n – послед. случайных вероятн. мер, а μ – детерминистическая мера. μ_n сходится к μ п.н. (по вероятности, в среднем) в грубой топологии если для $\forall f(x) \in C_c(\mathbb{R})$

$$\int f(x)\, d\mu_n(x) \xrightarrow{\text{п.н.}(\mathbb{P}, \mathbb{E})} \int f(x)\, d\mu(x),$$

($C_c(\mathbb{R})$ – множество непрерывн. ф-й с компактным носителем). Сходимость в грубой топологии отличается от слабой сходимости тем, что часть массы может уйти на бесконечность. Если известно, что последовательность случайных вероятностных мер сходится в грубой топологии к вероятностной мере, то имеет место слабая сходимость (сходимость по распределению).

<u>Теорема Стильтьеса (о непрерывности).</u>

$$\mu_n \xrightarrow{\mathbb{D}} \mu \quad \text{п.н.} \quad (\mathbb{P}, \mathbb{E})$$

тогда и только тогда, когда $S_{\mu_n}(z) \to \mu$ п.н. $(\mathbb{P}, \mathbb{E})$ для $\forall z \in \mathbb{C}^+$.

---

2. Преобразование Стильтьеса эмпирической ф-ии распред. собств значений матриц.

Пусть $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – эрмитова матрица, $R = R^+$, и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ её собств. значения. Введём э.ф.р.

$$F_R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{x \geq \lambda_i}.$$

Её преобраз. Стильтьеса:

$$S_R(z) = \int \frac{1}{x-z}\, dF_R(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i - z} = \frac{1}{n} Tr\,(R - \mathbb{1}_n z)^{-1}$$

Лемма.

Пусть $A \in \mathbb{C}^{N\times n}$ и $B \in \mathbb{C}^{n\times N}$ такие, что AB - эрмитова $(AB)^+ = AB$.

Тогда для $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$$\frac{n}{N} S_{BA}(z) = S_{AB}(z) + \frac{N-n}{N}\,\frac{1}{z}$$

Док-во: Пусть $N > n$. $\det(AB - \lambda) = \lambda^{N-n} \det(BA - \lambda)$

Для квадратных матриц: $BA = A^{-1}(AB)A$

Прямоугольные матрицы дополним нулями до квадратных.

Т.е. AB имеет те же с.з. что и BA плюс $N-n$ нулевых. Добавляя к мере $(N-n)$ δ₀ получим утв. для S_{AB}. □

Теорема Марченко-Пастура.

Пусть $X \in \mathbb{C}^{N\times n}$ - сл. матрица с независимыми матричными элементами:

$$\mathbb{E}(X_{ij}) = 0 \qquad \mathbb{D}(X_{ij}) = \frac{1}{n}.$$

Введем $R_N := XX^+$. Тогда в пределе $N\to\infty$, $n\to\infty$ $N/n \to c \in (0,\infty)$

$F_{R_n}(x) \xrightarrow{\mathbb{D}} F_{PM}(x)$ почти наверное

где $F_{PM}(x)$ задается плотностью

$$f_{MП}(x) = \mathbb{1}_{c>1}(1-c^{-1})\delta(x) + \frac{1}{2\pi xc}\sqrt{(x-a_-)(a_+-x)}$$

$$a_\pm = (1 \pm \sqrt{c})^2$$

<u>План.</u> Связать $\frac{1}{N}\operatorname{tr}(XX^+ - zI_N)^{-1}$ и $\frac{1}{n}\operatorname{tr}(X^+X - zI_n)^{-1}$

1) Доказать что: $\left[(XX^+ - zI_N)^{-1}\right]_{11} = \dfrac{1}{-z - zy^+(Y^+Y - zI_n)^{-1}y}$

где y - первый столбик матрицы X^+, и $X = \begin{pmatrix} y^+ \\ Y \end{pmatrix}$.

2) Доказать: $y^+(Y^+Y - zI_n)^{-1}y - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(Y^+Y - zI_n)^{-1} \to 0$

3) $\frac{1}{n}\operatorname{tr}(Y^+Y - zI_n)^{-1} - \frac{1}{n}\operatorname{tr}(X^+X - zI_n)^{-1} \to 0$

4) $\frac{1}{n}\operatorname{tr}(X^+X - zI_n)^{-1} = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(XX^+ - zI_N)^{-1} + \frac{N-n}{n}\frac{1}{z}$

5) $\frac{1}{N}\operatorname{tr}(XX^+ - zI_N)^{-1} = \frac{1}{N}\sum_i (XX^+ - zI_N)^{-1}_{ii} \to$

$$\to \frac{1}{1 - \frac{N}{n} - z - z\frac{N}{n}\frac{1}{N}\operatorname{tr}(XX^+ - zI_N)^{-1}}$$

Откуда имеем уравнение на преобр. Стильтьеса: $S(z) = \dfrac{1}{1 - c - zc\,S(z) - z}$

Доказательство пункта 1.

Лемма (дополнение Шура):

Пусть $D = D^{\dagger} \in \mathbb{C}^{N\times N}$: $D = \begin{pmatrix} A & \tilde{B} \\ B & C \end{pmatrix}$

$A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ $C \in \mathbb{C}^{(N-m)\times(N-m)}$ $B \in \mathbb{C}^{(N-m)\times m}$ $\tilde{B} \in \mathbb{C}^{m\times(N-m)}$

$$(D^{-1})_{ij} = \big(\underbrace{A - \tilde{B}C^{-1}B}_{\text{дополнение Шура}}\big)^{-1}_{ij} \quad \text{для } 1 \le i,j \le m$$

Док-во: Идея представить матрицу D в виде блочного разложение Гаусса:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$$

Введем матрицу $L := \begin{array}{cc|c} & m & N-m \\ \begin{array}{c} m \\ N-m \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline -C^{-1}B & \mathbb{1} \end{array}\right) \end{array}$

Её обратная: $L^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline C^{-1}B & \mathbb{1} \end{array}\right)$

$$DL = \begin{pmatrix} A & \tilde{B} \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -C^{-1}B & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \tilde{B}C^{-1}B & \tilde{B} \\ 0 & C \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \tilde{B}C^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A - \tilde{B}C^{-1}B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$$D = DLL^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{B}C^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A - \tilde{B}C^{-1}B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -C^{-1}B & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$D = XYZ \Rightarrow D^{-1} = Z^{-1}Y^{-1}X^{-1}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ C^{-1}B & \mathbb{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (A - \tilde{B}C^{-1}B)^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\tilde{B}C^{-1} \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Получим: $D^{-1} = \begin{pmatrix} (A - \tilde{B} C^{-1} B)^{-1} & * \\ * & C^{-1} \end{pmatrix}$ □

Представим матрицу X в виде

$X = \begin{pmatrix} y^+ \\ Y \end{pmatrix}$ $\quad y^+ = (y_1^*, \dots, y_n^*) = (x_{11}, \dots, x_{1n})$

$Y \in \mathbb{C}^{(N-1)\times n}$

Тогда $R_N = XX^+ = \begin{pmatrix} y^+ y & y^+ Y^+ \\ Y y & Y Y^+ \end{pmatrix}$

$$(R_N - z 1\!\!1_N)^{-1}_{11} = \frac{1}{y^+ y - z - y^+ Y^+ (YY^+ - z)^{-1} Y y} = \frac{1}{-z + y^+ (1\!\!1_n - Y^+ (YY^+ - z)^{-1} Y) y}$$

$$\mathrm{Tr}\,(R_N - z 1\!\!1_N)^{-1} = \frac{1}{-z + y^+ (1\!\!1_n - Y^+ (YY^+ - z)^{-1} Y) y} + \mathrm{Tr}\,(YY^+ - z 1\!\!1_{N-1})$$

Утв.

$$I_n - Y^+ (YY^+ - z I_{N-1})^{-1} Y = z (I_n z - Y^+ Y)^{-1}$$

Док-во: Равенство является матричным аналогом скалярного равенства $1 - \frac{x}{x-z} = -\frac{z}{x-z}$ и проверяется прямым умножением. □

Получим

$$(R_N - 1\!\!1_N z)^{-1}_{11} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 + y^+ (Y^+ Y - I_n z)^{-1} y}$$

2) $$y^+ (Y^+Y - zI_n)^{-1} y \to \frac{1}{n} \mathrm{Tr} (Y^+Y - zI_n)$$

Пусть A_N - последовательность матриц и предел $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, A_N < \infty$ существует, и y - N-компонентный вектор, с независимыми компонентами: $\mathbb{E}(y_i y_j^*) = \frac{\delta_{ij}}{N}$

Тогда $y^+ A_N y \longrightarrow \mathbb{E}(y^+ A_N y) = \sum\limits_{i,j} (A_N)_{ij} y_i^* y_j =$
$= \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, A_N$

Пусть $\exists k>0$: $\mathbb{E}\left(|y^+ A_N y - \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, A_N|^k\right) \le \frac{C}{N^{1+\varepsilon}}$, тогда по лемме Б-К $y^+ A_N y \to \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, A_N$ п.н. (см. лекцию 1)

<u>Теорема</u>. Пусть $\mathbb{E}(|x_i|^2) = \frac{1}{N}$ $\mathbb{E}(|x|^8) = O(\frac{1}{N^4})$, $\|A\| < \infty$

Тогда $\mathbb{E}\left[|x_N^+ A_N x_N - \frac{1}{N} \mathrm{tr}\, A_N|^4\right] = O(\frac{1}{N^2})$

<u>Набросок Док-ва:</u>

используем нерав. Гёльдера: $\sum\limits_{n=1}^{N} |x_n y_n| \le \left(\sum\limits_n |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_n |y_n|^q\right)^{q}$ где $1/p + \frac{1}{q} = 1$ $p,q>0$. Возьмём $n=2$ $y_1 = y_2 = 1$, тогда

$$\mathbb{E}\left(|x_N^+ A_N x_N - \frac{1}{N} \mathrm{tr}\, A_N|^4\right] \le 8\left(\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} A_{N\,ii}\left(|x_i|^2 - \frac{1}{N}\right)\right]^4 + \right.$$
$$\left. + \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i\ne j} A_{ij} x_i^+ x_j\right|^4\right]\right) = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$ — получим эту оценку, раскрывая степени под знаком мат. ожидания

Например, рассмотрим $x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{j_1}^* x_{j_2}^* x_{j_3}^* x_{j_4}^* A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2}^+ A_{i_3 j_3} A_{i_4 j_4}^+$

т.к. $\mathbb{E}(x_i) = 0$ индексы должны быть попарно равны.

Рассмотрим один пример спаривания:

$$\mathbb{E}(x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_2}^* x_{i_1}^* x_{i_4}^* x_{i_3}^* A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_1}^+ A_{i_3 i_4} A_{i_4 i_3}^+)$$
$$= \frac{1}{N^4} (\mathrm{Tr}\, AA^+)^2 = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Остальные случаи аналогичны. □

Т. к. $\frac{1}{N}\|(YY^{+}-Iz)^{-1}\| \le \frac{1}{\operatorname{Im} z}$, то при $\forall \operatorname{Im} z>0$

имеем сходимость:

$$y^{+}(Y^{+}Y-zI_n)^{-1}y \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(Y^{+}Y-zI_n)$$

Используя $\operatorname{Im} z>0$, получим

$$(R_N-\mathbb{1}_N z)^{-1}_{11} \xrightarrow{\text{п.н.}} -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1+S^{(1)}_{YY^{+}}(z)},$$

где $S^{(1)}_{YY^{+}}(z)$ - преобразование Стильтьеса эмпирической спектральной меры матрицы YY^{+}, где матрица Y получена из X вычеркиванием первой строки. Очевидно, аналогичное равенство выполняется для i-й строки

$$(R_N-\mathbb{1}_N z)^{-1}_{ii} \xrightarrow{\text{п.н.}} -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1+S^{(i)}_{YY^{+}}(z)}$$

По свойству резольвенты произведения прямоугольных матриц

$$n\,S^{(i)}_{Y^{+}Y}(z)=N\,S^{(i)}_{YY^{+}}+\frac{N-n}{z},$$

откуда получим

$$(R_N-\mathbb{1}_N z)^{-1}_{ii} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{1-c-z-cz\,S^{(i)}_{YY^{+}}}.$$

Последний шаг - показать, что преобразование Стильтьеса $S^{(i)}_{YY^{+}}$ близок к $S_{XX^{+}}$. Это общее свойство устойчивости собственных значений по отношению к возмущению малого ранга.

Покажем, что для $\forall z:\ \operatorname{Im} z>0$, $\left|S_{R_N}(z) - S_{YY^+}(z)\right| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$

Матрица YY^+ получена из XX^+ вычеркиванием одного столбца и одной строки, или добавлением матрицы ранга 1. Малость изменения резольвенты, при возмущениях малого ранга, основано на св-ве перемежаемости собств. значений.

Лемма. Пусть $A=A^+\in\mathbb{C}^{N\times N}$ - случайная эрмитова матрица и $A^{(1)}$ получена из A вычеркиванием 1-ой строки и 1-го столбца. (будем считать распред. матр. элементов гладким)

Пусть $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_N$ - с. з. A и

$\lambda_1^{(1)}<\ldots<\lambda_{N-1}^{(1)}$ - с. з. $A^{(1)}$.

(из-за гладкости нет совп. п. н.)

Тогда: $\lambda_1<\lambda_1^{(1)}<\lambda_2<\ldots<\lambda_{N-1}^{(1)}<\lambda_N$.

Док-во: Пусть $\vec{v}=(v_1,\ldots,v_N)$ - собств вектор A:

Пусть $A=\begin{pmatrix}\alpha & \vec{a}^+\\ \vec{a} & A^{(1)}\end{pmatrix}$ и $\vec{v}=(v_1,\ldots,v_N)$ - собств вектор A

$A v=\lambda v \Rightarrow \alpha v_1+\vec{a}^+\vec{v}^{(1)}=\lambda v_1$, где $v^{(1)}=(v_2,\ldots,v_N)$

$\vec{a}v_1+A^{(1)}\vec{v}^{(1)}=\lambda\vec{v}^{(1)}$

$(\lambda-\alpha)v_1=\vec{a}^+\vec{v}^{(1)}=\vec{a}^+(\lambda-A^{(1)})^{-1}\vec{a}\,v_1$, где $v_1\neq 0$ п.н.

$$\lambda-\alpha = \vec a^+ (\lambda - A^{(1)})^{-1} \vec a \to$$

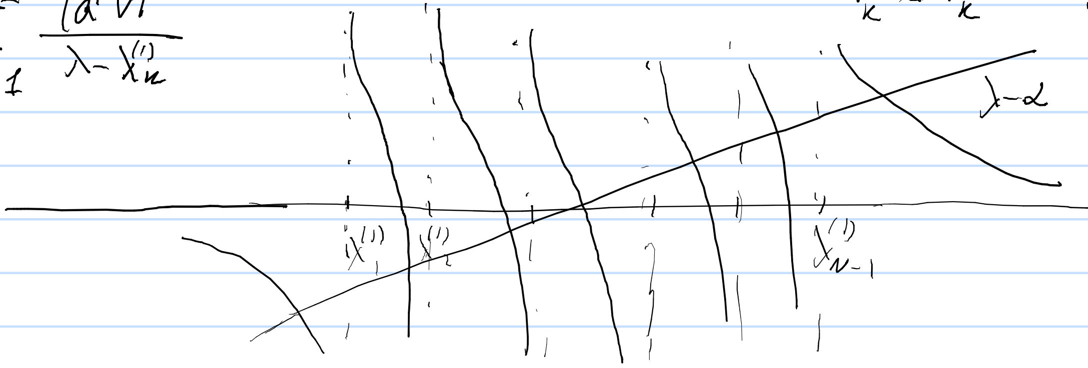
Пусть $\vec V^{(1)}$ - собств вектор $A^{(1)}$.

$$A^{(1)} \vec V_k^{(1)} = \lambda \vec V_k^{(1)}, \text{ т.е.}$$

$$A^{(1)} = \sum \vec V_k^{(1)} \otimes \vec V_k^{+(1)} \lambda_k$$

$$\lambda-\alpha = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\vec a^+ \vec V)\cdot(\vec a \cdot \vec V^+)}{\lambda-\lambda_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1}\frac{|\vec a^+\vec V|^2}{\lambda-\lambda_k^{(1)}}$$



ф-я $\phi(\lambda) = \sum_{k=1}^{N-1}\frac{|\vec a^+\vec V|^2}{\lambda-\lambda_k^{(1)}}$ — монотонно убыв при $\lambda\in[\lambda_{k-1}^{(1)}, \lambda_k^{(1)}]$

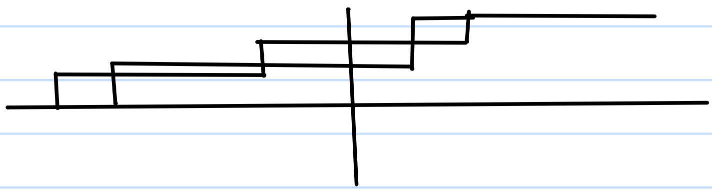
и ур-е $\lambda-\alpha=\phi(\lambda)$ имеет ед. решение для $\forall k$. п.н.

Следствие: Коши!

$$|S_A(z) - S_{A^{(1)}}(z)| \to 0 \quad \text{п.н.}$$

Док-во: Введем эмпирич. ф-ии распред

$F_A(z)$ и $F_{A^{(1)}}(z)$ $\qquad |F_A(z)-F_{A^{(1)}}(z)| \le \frac{1}{N}$



$$\frac{1}{(L-E-i\eta)} - \frac{1}{-L-E-i\eta} = \frac{-L-E-i\eta-L+E+i\eta}{(E+i\eta)^2-L^2}$$

$$|S_A(z) - S_{A^{(1)}}(z)| = \left|\int_{\mathbb R}\frac{dF_A(\lambda)}{\lambda-z} - \int_{\mathbb R}\frac{dF_{A^{(1)}}(\lambda)}{\lambda-z}\right| =$$

$$= \left|\frac{F_A(\lambda)-F_{A^{(1)}}(\lambda)}{\lambda-z}\right|_{\lambda=-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb R}\frac{(F_A(\lambda)-F_{A^{(1)}}(\lambda))}{(\lambda-z)^2}d\lambda \le \frac{1}{N}\int_{\mathbb R}\frac{dz}{|\lambda-z|^2}d\lambda = \frac{\pi}{\operatorname{Im} z}\frac{1}{N}$$

Таким образом имеем, при $\operatorname{Im} z > 0$

$$S_{R_N}(z) = \frac{1}{N} \operatorname{Tr}(R_N - I_N z)^{-1} = \frac{1}{N} \sum_i (R_N - I_N z)^{-1}_{ii} \xrightarrow{\text{п.н.}} -\frac{1}{N} \frac{1}{z} \sum_i \frac{1}{1 + c S^{(i)}_{YY^*} + \frac{c-1}{z}} =$$

$$\xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{1 - c - z - czS^{(i)}_{R_N}},$$ т.е. равенство

$$S_{R_N}(z) - \frac{1}{1 - c - z - czS_{R_N}} = 0$$

выполняется с вероятностью 1 при $N \to \infty$.

Таким образом, $s_{R_N}(z)$ сходится п. н. к пределу, который удовлетворяет соотношению:

$$s(z) = \frac{1}{1-c-z-cz\,s(z)}.$$

Это уравнение имеет два решения:

$$s(z) = \frac{1-c-z \pm i\sqrt{(a_+ - z)(z-a_-)}}{2cz}, \text{ где } a_\pm = (1\pm\sqrt{c})^2$$

Требуя $\operatorname{Im} s(z) > 0$ при $\operatorname{Im}(z) > 0$, выберем решение с плюсом. Проверяя $iy\,s(iy) \to 1$ убеждаемся, что результат – преобраз. Стилтьеса распред. вероятн.

Плотность распределения можно вычислить как

$$f_{R_N}(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} s(z)$$

Заметим, что при $z \to 0$ $s(z) = \dfrac{1-c-|1-c|+O(z)}{2cz}$.

При $c > 1$ имеется полюс: $s(z) \sim \dfrac{1-c^{-1}}{z}$

Вспоминая, что $\dfrac{1}{z \pm i\varepsilon} = \mp i\pi\delta(z)$, получим

$$\boxed{f(x) = (1-c^{-1})\delta(x) + \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{(a_+ - x)(x-a_-)}}{2cx}}$$

$\square$