

Семинар 7

1. Найти матрицу линейного преобразования, которое ортогонально проектирует четырехмерное евклидово пространство на гиперплоскость $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ (базис ортонормированный).

2. Найти матрицу отражения в зеркале $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ в псевдоевклидовом пространстве $E^{3,1}$ (базис канонический).

3. Известно, что линейное преобразование векторного пространства диагонализуемо над исходным полем. Доказать, что диагонализуемо над исходным полем и его ограничение на каждое инвариантное подпространство.

4. Сколько инвариантных подпространств у линейного оператора в четырехмерном вещественном векторном пространстве, если набор его собственных значений $(1, 2, 3, 4)$?

5. Требуется ответить на ряд вопросов:

а) можно ли в пространстве $E^{2,1}$ найти базис, в котором его квадратичная форма имеет вид $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$?

б) известно, что в некотором базисе пространства $E^{2,1}$ квадратичная форма имеет вид $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2$. Является ли плоскость $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ эллиптической, гиперболической или параболической? Как выглядит уравнение конуса отрицательных векторов (конуса будущего) в этом базисе?

Рассмотрим модель плоскости Лобачевского в проективизации конуса будущего (модель Кэли-Клейна). Чему равно гиперболическое расстояние между точками плоскости, которые определяются векторами с координатами $(0, 1, 1)$ и $(1, 0, 1)$ в этом базисе?