1 Вводная лекция

2 Квантование: частицы и струны

3 Двумерные теории бозонов и фермионов

4 Операторный формализм для скалярного поля

5 Тензор энергии импульса и примарные операторы

6 Фермионы и системы первого порядка

7 Бозонизация и однопетлевые статсуммы

8 Бозоны на торе и фермионы

9 Теорема Нётер и конформные тождества Уорда

10 Конформные блоки для алгебры Вирасоро

11 Вычисления в конформной теории при помощи свободных полей

11.1 Фоковские модули

Рассмотрим голоморфное бозонное поле $\varphi(z)$, с нормировкой $\varphi(z)\varphi(w) \sim -\log(z-w)$. Разложение этого поля имеет вид

$$\varphi(z) = -i\sum_{n\neq 0} n\frac{a_n}{z^n} + \widehat{Q} + a_0 \log z \tag{11.1}$$

Тогда соотношения имеют вид $[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}$, $[a_0, \widehat{Q}] = 1$. Тензор энергии импульса определен по формуле

$$T(z) = -\frac{1}{2}(\partial\varphi(z))^2 + \lambda\partial^2\varphi(z). \tag{11.2}$$

Центральный заряд равен $c = 1 + 12\lambda^2$. В терминах Лиувиллевской параметризации $\lambda = (b^{-1} + b)/\sqrt{2}$. Можно написать явную формулу для генераторов L_n

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha+\beta=n} a_\alpha a_\beta + i\lambda(n+1)a_n \tag{11.3}$$

Вертексные операторы $V_\alpha = e^{i\alpha\varphi}$ являются примарными относительно этого $T(z)$ с конформной размерностью $\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 2i\lambda)$. Можно написать это в терминах состояний: рассмотрим старший вектор $|\alpha\rangle$ определенный условиями

$$a_k|\alpha\rangle = 0 \;\; k > 0, \quad a_0|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{11.4}$$

Тогда $L_0|\alpha\rangle = \Delta_\alpha|\alpha\rangle$. Отметим еще симметрию $\Delta_\alpha = \Delta_{-2i\lambda-\alpha}$. Эта симметрия нам еще будет нужна.

Действие генераторов a_k, $k < 0$ на вектор $|\alpha\rangle$ порождает модуль. Этот модуль имеет базис состоящий из векторов вида $a_{-\mu}|\alpha\rangle$, $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_k > 0)$. Обычно этот модуль называют фоковским и обозначают F_α. Формулы (11.3) определяют действие алгебры Вирасоро на модуле F_α. При общем α конформная размерность $\Delta_\alpha \neq \Delta_{m,n}$, значит модуль F_α неприводим как модуль над алгеброй Вирасоро. При специальных α конечно ситуация интереснее.

На модуле F_α тоже есть форма Шаповалова построенная по правилу сопряжения операторов $a_n^\dagger = -a_{-n}$. Однако при этом сопряжении L_n вообще говоря переходит не в себя

$$L_n^\dagger = \sum_{\alpha+\beta=-n} a_\alpha a_\beta - i\lambda(n+1)a_{-n} = \sum_{\alpha+\beta=-n} a_\alpha a_\beta + i\lambda(-n+1)a_{-n} - 2i\lambda a_{-n}. \tag{11.5}$$

Если ввести другую алгебру Гейзенберга $\tilde{a}_n = -a_n + \delta_{n,0}2i\lambda$, то

$$L_n(a)^\dagger = \sum_{\alpha+\beta=-n} \tilde{a}_\alpha \tilde{a}_\beta + i\lambda(-n+1)\tilde{a}_{-n} = L_{-n}(\tilde{a}). \tag{11.6}$$

Таким образом получаем, что относительно Вирасоровоской формы Шаповалова двойствеными модулями являются F_α и $\mathrm{F}_{-2i\lambda-\alpha}$.

Для полноты картины сопоставим еще параметр α с (Лиувиллевской) параметризацией через параметр P из прошлой лекции. Имеем

$$\frac{1}{2}\alpha(\alpha + 2i\lambda) = (\frac{b^{-1} + b}{2})^2 - P^2, \quad \lambda = (b^{-1} + b)/\sqrt{2}. \tag{11.7}$$

Откуда

$$P = \frac{-i}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{b^{-1} + b}{2}, \qquad \alpha = i\sqrt{2}P - \frac{i}{\sqrt{2}}(b^{-1} + b). \tag{11.8}$$

В частности специальным значениям $P = P_{m,n}$ соответствуют

$$\alpha_{m,n} = \frac{i}{\sqrt{2}}((m-1)b^{-1} + (n-1)b). \tag{11.9}$$

11.2 Конформные блоки, скрининги

Поскольку поля V_α являются примарными, то естественно хотеть написать формулу для конформных блоков используя бозонизацию. Например четырехточку полей $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, V_{\alpha_3}, V_{\alpha_4}$ Вертексный оператор $V_{\alpha_2}(z)$ бьет из модуля F_{α_1} в модуль $\mathrm{F}_{\alpha_1+\alpha_2}$, следующий оператор $V_{\alpha_3}(z)$ бьет в модуль $\mathrm{F}_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$. Чтобы посчитать затем спаривание со старшим вектором модуля F_{α_4} необходимо, чтобы $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = -\alpha_4 - 2i\lambda$. Таким образом при помощи свободных полей легко вычислить четырехточечный конформный блок

$$\mathcal{F}(\vec{\Delta}, \Delta, c|z) = \langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_1}(z)V_{\alpha_1}(1)V_{\alpha_4}(\infty)\rangle = z^{\alpha_1\alpha_2}(1-z)^{\alpha_2\alpha_3}, \tag{11.10}$$

где $\Delta_i = \Delta_{\alpha_i}$, $\Delta = \Delta_\alpha$ и выполнено два дополнительных соотношения на параметры конформного блока: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = -2i\lambda$ (условие сохранения заряда) и $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$ (специальная промежуточная размерность). Отметим, что здесь мы немного изменили нормировку конформного блока — теперь этот ряд начинается не с 1, а с $z^{\Delta-\Delta_1-\Delta_2}$, это более естественно если смотреть на конформный блок как на матричный элемент. В литературе используются обе нормировки.

Хочется конечно избавится от этих условий и научиться вычислять конформные блоки в более общих ситуациях, за рамками условия сохранения заряда. Это можно сделать при помощи следующего приема принадлежащего Доценко и Фатееву (следуя идее из работы Фейгина и Фукса). А именно, баланс заряда можно достичь вставляя в конформный блок операторы вида $S = \oint e^{i\alpha\varphi(z)}dz$. Для того чтобы такая вставка была согласована с определением конформного блока надо чтобы оператор S коммутировал с алгебрай Вирасоро. Этого можно достичь:

$$[L_n, \oint e^{i\alpha\varphi(z)}dz] = \oint \left(z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} + \Delta_\alpha(n+1)z^n\right)e^{i\alpha\varphi(z)}dz = \oint \frac{\partial}{\partial z}\left(z^{n+1}e^{i\alpha\varphi(z)}\right)dz = 0, \tag{11.11}$$

где прелпоследний переход верен только если

$$1 = \Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(2i\lambda + \alpha).$$

Получается квадратное уравнение на α которое имеет два решения:

$$\alpha_+ = -i\sqrt{2}b, \quad \alpha_- = -i\sqrt{2}b^{-1}. \tag{11.12}$$

Соответствующие операторы обозначаются S_+ и S_- и называются экранирующими операторами или скринингами. Таким образом в определении конформного блока мы заменяем вертексный оператор $V_{\alpha_2}(z)$

$$V_{\alpha_2}(z) \mapsto \oint V_{\alpha_2}(z)S_-(x_1)\cdots S_-(x_{s_2})S_+(y_1)\cdots S_+(y_{r_2})dx_1\cdots dy_{r_2} \tag{11.13}$$

и аналогично для $V_{\alpha_2}(z)$. Тогда условие сохранение заряда имеет вид $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = -2i\lambda - r\alpha_- - s\alpha_+$, где $r = r_2 + r_3$, $s = s_2 + s_3$ суммарное числа вставленных плюсовых и минусовых скринингов соответственно. Промежуточное α равно $\alpha_1+\alpha_2+r_2\alpha_-+s_2\alpha_+$. Конформный блок имеет вид $r+s$ кратного интеграла. Выбора контура в интеграле (да и в формуле (11.13)) пока заметен под ковер, но мы обсудим его ниже.

11.3 Выбор контура, случай вырожденных полей

Расмотрим простейший пример требующий вставки скрининга: случай резонанса $\alpha_1 + \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = -2i\lambda-\alpha_+$. В этом случае надо добавить только один скрининг S_+. Тогда конформный блок имеет вид

$$\mathcal{F}(\vec{\Delta},\Delta,c|z) = \oint \langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(z)V_{\alpha_3}(1)V_{\alpha_4}(\infty)V_{\alpha_+}(x)\rangle dx = \\ = z^{\alpha_1\alpha_2}(1-z)^{\alpha_2\alpha_3}\oint x^{\alpha_1\alpha_+}(z-x)^{\alpha_2\alpha_+}(1-x)^{\alpha_3\alpha_+}dx \quad (11.14)$$

Известно, что полученный интеграл является решением гипергеометрического уравнения. В качестве замкнутого контура обычно берется петля Похгаммера охватывающая две особые точки из 4 $(0,z,1,\infty)$. И эту петлю можно продеформировать в отрезок соединяющий две особые точки. Обозначим через C_1 отрезок соединяющий $0,z$ и через C_2 отрезок соединяющий $1,\infty$. Тогда

$$\oint_{C_1} x^A(x-1)^B(z-x)^C dx = \\ = z^{1+A+B}\frac{\Gamma(-A-B-C-1)\Gamma(B+1)}{\Gamma(-A-C)}{}_2F_1(-C,-A-B-C-1,A-C|z) \quad (11.15)$$

$$\oint_{C_2} x^A(x-1)^B(z-x)^C dx = \\ = \frac{\Gamma(-A-B-C-1)\Gamma(B+1)}{\Gamma(-A-C)}{}_2F_1(-C,-A-B-C-1,A-C|z) \quad (11.16)$$

Здесь (и всюду далее) мы не будем обращать внимание на условия сходимости интеграла имея ввиду, что он вычисляется при допустимых значениях параметров A,B,C когда сходится, а дальше делается аналитическое продолжение по этим параметрам.

В случае обоих контуров ответ имеет вид ряда по z, т.е. как и должено быть для конформного блока. Более того, понятно, что первый контур происходит из петли вокруг точек $0,z$, т.е. из одевания скринингом вертексного оператора V_{α_2} как в формуле (11.13). А второй контур происходит из одевания скринингом вертексного оператора V_{α_3}.

Это можно еще проверить сравнив лидирующие степени z. В нашей нормировке она равна $\Delta_\alpha - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2}$. Для контура C_2 получается

$$\Delta_\alpha - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 \tag{11.17}$$

откуда следует, что $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Для контура C_1 уравнение имеет вид

$$\Delta_\alpha - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2} = \alpha_1\alpha_2 + 1 + \alpha_1\alpha_+ + \alpha_2\alpha_+ \tag{11.18}$$

откуда следует, что $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_+$.

Подведем итог: мы указали контура для интеграла (11.14) и показали каким значениям промежуточных размерностей они соответствуют. В общем случае (по крайней мере когда скрининги одного типа) ответ аналогичен. А именно, если вертексный оператор V_{α_2} одет s_2 скринингами S_+ и вертексный оператор V_{α_3} одет s_3 скринингами S_+, то промежуточное значение $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + s_2\alpha_+$, а интеграл имеет вид

$$\prod_{i=1}^{s_2}\int_0^z dx_i \prod_{j=1}^{s_3}\int_1^\infty dx_{s_2+j} \prod_{i<j}(x_i - x_j)^{\alpha_+^2} \prod_i x^{\alpha_1\alpha_+}(z-x)^{\alpha_2\alpha_+}(1-x)^{\alpha_3\alpha_+}. \tag{11.19}$$

Ответ для общих значений α и суммы $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ получается «аналитическим продолжением» по r_2, r_3 от целых чисел к произвольным комплексным.

11.4 Случай вырожденных полей

На предыдущей лекции мы обсуждали, что если одно из вставленных полей является вырожденным, то конформный блок удовлетворяет дифференциальному уравнению (а если точек больше чем 4, то уравнению в частных производных). Кроме того, из этого дифференциального уравнения следуют правила отбора, которые в терминах конформного блока являются ограничениями на значение промежуточной размерности. Посмотрим как это связано с интегральными представлениями которые мы обсуждали на этой лекции.

Разберем простейший пример. Пусть выполнено условие суммы зарядов $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -2i\lambda - \alpha_+$, то есть конформный блок задается интегралом (11.14), но одно из полей является специальным, скажем $\alpha = \alpha_{1,2}$. Интегральное представления есть для двух значений промежуточного α: $\alpha = \alpha_1 + \alpha_{1,2}$ или $\alpha = \alpha_1 + \alpha_{1,2} + \alpha_+$. В терминах параметра P используя формулы (11.8) и (11.12) получаем

$$P = P_1 + b/2 \quad \text{или} \quad P = P_1 - b/2. \tag{11.20}$$

Это как раз согласуется с найденными в прошлый раз правилами отбора для конформного блока со вставленным вырожденным полем $\Phi_{1,2}$.

11.5 Теорема Каца

Другое (а исторически более раннее), применение скринингов — это построение сингулярных векторов. Действительно, если оператор

$$S_+ = \oint e^{i\alpha_+\varphi(x)}dx \tag{11.21}$$

действует из одного Фоковского модуля F_α в другой $\mathrm{F}_{\alpha+\alpha_+}$, то тогда вектор $S_+|\alpha\rangle \in \mathrm{F}_{\alpha+\alpha_+}$ будет сингулярным вектором (так как S_+ коммутирует с алгеброй Вирасоро). Для этого нужно чтобы контур в интеграле (11.21) замыкался и чтобы образ $|\alpha\rangle$ был не равен нулю. Это приводит к таким ограниченям:

$$\alpha\alpha_+ \in \mathbb{Z}, \qquad \Delta_{\alpha+\alpha_+} < \Delta_\alpha. \tag{11.22}$$

Из первого условия вытекает, что $\alpha = \frac{m}{2}\alpha_-$, $m \in \mathbb{Z}$, тогда из второго условия следует, что $m \geq 0$. Итого

$$\alpha + \alpha_+ = \frac{m}{2}\alpha_- + \alpha_+ = \alpha_{-m-1,-1} \tag{11.23}$$

где мы использовали формулы (11.9) и (11.12). Значит, модуль со старшим весом $\Delta_{\alpha+\alpha_+} = \Delta_{m+1,1}$ имеет сингулярный вектор. Мы доказали некую часть теоремы Каца-Фейгина-Фукса.

Ясно, что если бы использовали скриннг S_-, то доказали существование сингулярного вектора в модуле со старшим весом $\Delta_{1,n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Для того, чтобы построить сингулярные вектора в модулях Верма $\mathrm{V}_{\Delta_{m,n},c}$ можно надо использовать операторы

$$S_+^{(n)} = \int_{\Gamma_n} \prod_{j=1}^n e^{i\alpha_+\varphi(x_j)}dx_j = \int_{\Gamma_n} e^{\sum_j i\alpha_+\varphi(x_j)} \prod_{j=1}^n \prod_{j<j'} (x_j - x_{j'})^{\alpha_+^2} x_j^{\alpha\alpha_+} dx_j. \tag{11.24}$$

Цикл Γ_n должен быть подбран так чтобы интеграл имел смысл и не равнялся нулю. Если бы Γ_n было бы просто произведением n окружностей из формулы (11.21) то $S_+^{(n)}$ бы просто равнялось S_+^n, но в общем случае это не так. Получается любопытная ситуация: оператор S_+ по формуле (11.21) не определен, но его «степень» (11.24) определена. И сингулярный вектор в модуле $\mathrm{V}_{\Delta_{m,n},c}$ будет равен $S_+^{(n)}|\alpha\rangle$.