

## Семинар 5. Алгебра Ли разностных операторов.

Пусть  $\mathfrak{a} = \mathbb{C}[x, x^{-1}, D, D^{-1}]$  – ассоциативная алгебра с соотношениями  $xD = qDx$ . Здесь  $q$  считается формальным параметром, т.е. алгебра рассматривается над полем рациональных функций  $\mathbb{C}(q)$ . Мы будем рассматривать эту алгебру как алгебру Ли относительно операции коммутатора. Алгебра  $\mathfrak{a}$  имеет представление разностными операторами на пространстве  $V = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ , где  $x$  действует как умножение на  $x$ , а  $D$  как оператор  $f(x) \mapsto f(q^{-1}x)$ . Полубесконечная внешняя степень  $\Lambda^{\infty/2}V$  порождена элементами вида  $\bigwedge_{i \in I} x^i$  для всех  $I \subset \mathbb{Z}$  таких, что существует  $N > 0$  такое что  $\mathbb{Z}_{>N} \subset I \subset \mathbb{Z}_{>-N}$ .

### Задача 1.

(а) Покажите, что на полубесконечной внешней степени  $\Lambda^{\infty/2}V$  корректно определено действие центрального расширения алгебры Ли  $\mathfrak{a}$ .

(б) Опишите это центральное расширение явно.

(в) Является ли это представление неприводимым?

(г) Найдите аннулятор в  $\mathfrak{a}$  “старшего вектора”  $v = 1 \wedge x \wedge x^2 \wedge \dots$  и опишите порожденное им подпредставление  $F$ .

(д) Найдите общий вид знаменателей матричных элементов в этом представлении.

**Задача 2.** Положим  $e_i := x^i D \in \mathfrak{a}$ . Пусть  $e(z) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} e_i z^{-i}$  – соответствующая производящая функция.

Вычислите матричный элемент  $\langle v^\vee, e(z_1)e(z_2)v \rangle$  (т.е. найдите общий вид такого матричного элемента), где  $v$  – вектор из представления  $F$ ,  $v^\vee$  – ковектор.

**Задача 3.** Покажите, что матричный элемент  $\langle v^\vee, e(z_1)e(z_2)e(z_3)v \rangle$ , где  $v$  – какой-нибудь вектор из представления  $F$ , а  $v^\vee$  – какой-нибудь ковектор, имеет вид  $\frac{P(z_1, z_2, z_3)}{\prod (z_i - qz_j)}$ , где  $P(z_1, z_2, z_3)$  – симметрический полином Лорана.

**Задача 4.** Покажите, что все полиномы  $P(z_1, z_2, z_3)$  из предыдущей задачи обращаются в нуль при некоторых значениях аргументов  $z_i$ . Каких?

**Задача 5.** Те же вопросы для представления  $F^{\otimes k}$  алгебры Ли  $\mathfrak{a}$ .

**Задача 6.** Определим  $e_i(s) := x^i D^s$  и соответствующую производящую функцию  $e^{(s)}(z) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} e_i^{(s)} z^{-i}$ .

Найдите общий вид матричного элемента  $\langle v^\vee, e^{(s_1)}(z_1)e^{(s_2)}(z_2)v \rangle$ .