Семинар 1. Алгебра Гейзенберга. Конформные блоки и вертексные операторы.

Алгеброй Гейзенберга $\mathfrak{h}$ называется следующее центральное расширение абелевой алгебры алгебры $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$: $[a(t),b(t)] := Res_{t=0}a(t)db(t)$. Пусть $h_i := t^i$ базис в этой алгебре. Предствление Фока F_p алгебры Гейзенберга – это представление $\mathfrak{h}$ в пространстве $U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})(h_0-p,h_1,h_2,\ldots)$. Для любого набора точек $z_1,\ldots,z_n$ на комплексной кривой C абелева алгебра $\mathfrak{h}_{out} := \mathbb{C}[C\backslash\{z_1,\ldots z_n\}]$ вкладывается в прямую сумму $\mathfrak{h}^{\oplus n}$ посредством разложения Лорана в точках z_i. Конформным блоком называется пространство $F_{p_1,\ldots p_n}(z_1,\ldots,z_n) = \bigotimes F_{p_i}/\mathfrak{h}_{out}\bigotimes F_{p_i}$.

Задача 1.
(а) Покажите, что конформный блок $F_{p_1,\ldots p_n}(z_1,\ldots,z_n)$ на $\mathbb{CP}^1$ равен нулю, если $\sum p_i \neq 0$, и одномерен, если $\sum p_i = 0$.
(б) Что можно сказать о конформных блоках на эллиптической кривой?
(в) На кривой старшего рода?

Задача 2.
(а) Покажите, что конформный блок на $\mathbb{CP}^1$ с двумя точками задает невырожденное спаривание $F_p(0)\otimes F_{-p}(\infty)\to\mathbb{C}$.
(б) Применяя это спаривание, покажите, что конформный блок на $\mathbb{CP}^1$ с тремя точками задает линейное отображение $F_{p_1}(0)\otimes F_{p_2}(z)\to F_{p_1+p_2}(\infty)$.

Задача 3. Пусть $Y_v(z) : F_{p_1}\to F_{p_1+p_2}$ – оператор, полученный подстановкой вектора $v\in F_{p_2}$ в качестве второго аргумента в оператор из предыдущей задачи.
(а) Для старшего вектора $v=1\in F_{p_2}$ выразите $[h_i,Y_1(z)]$ через h_i.
(б) Выпишите явно оператор $Y_1(z)$.
(в) Те же вопросы для оператора $Y_{h_{-1}}(z)$.
(г) Те же вопросы для оператора $Y_v(z)$, где $v=h_{-1}^{n_1}\cdot\ldots\cdot h_{-k}^{n_k}$.

Семинар 2. Алгебра Клиффорда. Спинорное представление.

Пусть V – векторное пространство с симметрической билинейной формой B. *Алгеброй Клиффорда* $Cl(V,B)$ называется алгебра с пространством образующих V и определяющими соотношениями $uv+vu = B(u,v)$ для всех $u,v\in V$.

Задача 1. Пусть V конечномерно. Докажите, что $\dim Cl(V,B) = 2^{\dim V}$.

Задача 2. Пусть V конечномерное комплексное пространство, а форма B невырожденна.
(а) Докажите, что если $\dim V = 2k$, то $Cl(V,B)\simeq Mat_{2^k}(\mathbb{C})$.
(б) Докажите, что если $\dim V = 2k+1$, то $Cl(V,B)\simeq Mat_{2^k}(\mathbb{C})\oplus Mat_{2^k}(\mathbb{C})$.

Задача 3. Классифицируйте конечномерные алгебры Клиффорда невырожденных форм над полем $\mathbb{R}$.

Задача 4.
(а) Покажите, что пространство, натянутое на квадратичные элементы вида $uv-vu\in Cl(V,B)$, замкнуто относительно коммутатора и изоморфно алгебре Ли $\mathfrak{so}(V,B)$.
(б) Постройте неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2n}$ размерности 2^n.
(в) Постройте неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2n+1}$ размерности 2^n.

Задача 5. Пусть $V=\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}[t,t^{-1}]dt$. Инвариантное спаривание $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ и $\mathbb{C}[t,t^{-1}]dt$ задает невырожденную симметрическую форму B на V. Пусть $\psi_i := t^i, \psi_i^* := t^{i-1}dz$ – образующие соответствующей алгебры Клиффорда, и $\psi(z),\psi^*(z)$ – соответствующие производящие ряды. Рассмотрим представление алгебры Клиффорда, порожденное вектором v таким, что $\psi_i v = 0 = \psi_j^* v$ для $i\geqslant 0, j>0$.
(а) Докажите, что действие коэффициентов рядов $\psi(z)^2,\psi^*(z)^2$ и $:\psi(z)\psi^*(z):$ корректно определено в этом представлении.
(б) найдите соотношения между этими коэффициентами как операторами в представлении.

Семинар 3-4. Вертексная алгебра с одной образующей.

Пусть $V = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Свободная алгебра $T(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$, порожденная пространством V, может быть описана следующим образом: $V^{\otimes n} = \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, z_2, z_2^{-1}, \ldots, z_n, z_n^{-1}]$, а произведение элементов $f \in V^{\otimes n}$ и $g \in V^{\otimes m}$ есть $(f * g)(z_1, \ldots, z_{n+m}) := f(z_1, \ldots, z_n)g(z_{n+1}, \ldots, z_{n+m})$.

Задача 1.

(а) Дайте аналогичное описание алгебры $S(V) = T(V)/\Lambda^2(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(V)$;

(б) Тот же вопрос для алгебры $\Lambda(V) = T(V)/S^2(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^n(V)$.

Задача 2.

(а) Имеем $\Lambda^2(V) = \{f(z_1, z_2) \in \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, z_2, z_2^{-1}] \mid f(z_1, z_2) = -f(z_2, z_1)\}$. Рассмотрим алгебру $T(V)/(z_1-z_2)^2\Lambda^2(V)$. Докажите, что это универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли, порожденной образующими $a_i,\ i \in \mathbb{Z}$ с определяющими соотношениями $\frac{[a_i,a_j]}{i-j} = \frac{[a_k,a_l]}{k-l}$ для всех $i + j = k + l$.

(б) Пусть $\mathbb{C}[z, z^{-1}, p]$ – алгебра Пуассона со скобкой $\{p, z\} = 1$. Покажите, что $p^2\mathbb{C}[z, z^{-1}, p]$ является подалгеброй Ли относительно скобки Пуассона, и укажите в ней образующие, удовлетворяющие соотношениям предыдущего пункта.

(в) Найдите дополнительные кубические соотношения, которым удовлетворяют найденные вами образующие.

Задача 3. Рассмотрим модуль M над алгеброй из предыдущей задачи, индуцированный с тривиального представления подалгебры, порожденной $a_i,\ i > 0$. Введем на этом модуле биградуировку (или весовое разложение) так, что степень старшего вектора равна $(0, 0)$, а степень a_i равна $(1, i)$.

(а) Найдите веса всех ненулевых весовых подпространств этого модуля.

(б)* Найдите характер этого модуля.

(в)* Тот же вопрос, если в алгебре выполняются еще и кубические соотношения.

Задача 4. Пусть $w \in M,\ w^\vee \in M^*$ – какие-нибудь вектор и ковектор.

(а) Покажите, что матричный элемент $\langle w^\vee, a(t_1)a(t_2)w\rangle$ имеет вид $\frac{P(t_1,t_2)}{(t_1-t_2)^2}$, где $P(t_1, t_2)$ – симметрический полином Лорана.

(б) Покажите, что матричный элемент $\langle w^\vee, a(t_1)a(t_2)\cdot\ldots\cdot a(t_n)w\rangle$ имеет вид $\frac{P(t_1,t_2,\ldots,t_n)}{\prod_{i<j}(t_i-t_j)^2}$, где $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – симметрический полином Лорана.

(в) Что можно сказать про полином $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, если дополнительно наложены кубические соотношения?