Введение в теорию моделей (весна 2017)

В.Б. Шехтман

Лекция 1

Языки первого порядка: синтаксис

Определение 1 Сигнатурой (первого порядка) *называется четверка вида* $L = (Const_L, Fn_L, Pr_L, \nu)$, *в которой*

- $Const_L, Fn_L, Pr_L$ *— попарно не пересекающиеся множества,*
- $Pr_L \neq \varnothing$,
- $\nu : Pr_L \cup Fn_L \longrightarrow \mathbf{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$.

Множества $Pr_L, Const_L, Fn_L$ *называются соответственно множеством* предикатных символов, *множеством* (предметных) констант *и множеством* функциональных символов *сигнатуры* L. ν *называется* функцией валентности.

Предикатный или функциональный символ G *называется* n-местным (n-арным), *если* $\nu(G) = n$. *Чтобы это подчеркнуть, его обозначают* G^n.

Определение 2 *Алфавит языка первого порядка сигнатуры* L *состоит из*

- *всех предикатных символов, констант и функциональных символов* L;
- *счетного множества (предметных) переменных* $Var = \{v_0, v_1, \dots\}$;

- *логических связок:* $\wedge, \neg$*;*
- *квантора* $\exists$*;*
- *технических символов: (,) (скобки), “,” (запятая).*

Предполагаем, что все эти множества попарно не пересекаются.

Как правило, для обозначения переменных будем использовать $x, y, z, \ldots$ вместо v_i.

Другие логические связки ($\rightarrow$, $\vee$, $\leftrightarrow$) и квантор $\forall$ вводятся как стандартные сокращения (например, $\forall x$ обозначает $\neg\exists x \neg$ и т.д.).

Определение 3 Термы сигнатуры L *строятся индуктивно:*

- *все константы — термы,*
- *все переменные — термы,*
- *если* $f^n \in Fn_L$ *и* $t_1, \ldots, t_n$ *— термы, то* $f(t_1, \ldots, t_n)$ *— терм.*

Таким образом, мы индукцией по длине слова, определяем, какие слова считаются термами.

Это определение можно сформулировать иначе:

Множество термов сигнатуры L — это наименьшее множество слов X, такое что

- $Const_L \subseteq X$,
- $Var \subseteq X$,
- если $f^n \in Fn_L$ и $t_1, \ldots, t_n \in X$, то $f(t_1, \ldots, t_n) \in X$.

Определение 4 Атомарные формулы сигнатуры L *— это слова вида* $P(t_1, \ldots, t_n)$*, где* $P^n \in Pr_L$*, а* $t_1, \ldots, t_n$ *— термы сигнатуры* L*.*

Определение 5 Формулы сигнатуры L *строятся индуктивно:*

- *все атомарные формулы являются формулами;*
- *если* A, B *— формулы, то* $(A \wedge B)$ *— формула;*
- *если* A *— формула, то* $\neg A$ *— формула;*
- *если* A *— формула,* $x \in Var$*, то* $\exists x A$ *— формула.*

Обозначения (для сигнатуры L):
Tm_L — множество всех термов,
Fm_L — множество всех формул,
AFm_L — множество всех атомарных формул.

Пример Рассмотрим сигнатуру колец (или сигнатуру арифметики). В ней имеются константы 0,1, предикатный символ $=^2$, и функциональные символы $+^2, \cdot^2$.

Атомарные формулы имеют вид $=(t_1, t_2)$, что мы будем записывать более привычным образом: $(t_1 = t_2)$. Аналогично, термы $+(t_1, t_2)$, $\cdot(t_1, t_2)$ записываются как $(t_1 + t_2)$, $(t_1 \cdot t_2)$.

В этой сигнатуре можно написать формулу

$$\exists x((x + x) = y),$$

которая означает, что y — четное число (если речь идет о натуральных или целых числах).

Для коммутативных колец формула

$$\neg(y \neq 0) \wedge \exists x((x \cdot y) = 0) \wedge \neg(y = 0))$$

означает, что y — делитель нуля, а формула

$$\exists x((x \cdot y) = 1)$$

— что y обратим.

С другой стороны, нельзя построить формулу, которая утверждает, что y нильпотентен: для этого потребуется возведение в натуральную степень и квантор по натуральным n:

$$\exists n \in \mathbf{N}\,(a^n = 0)$$

или же бесконечная дизъюнкция:

$$y = 0 \vee (y \cdot y) = 0 \vee ((y \cdot y) \cdot y) = 0 \vee \ldots$$

Но таких выражений в языке 1-го порядка нет. (Точное доказательство того, что нильпотентность не выразима в сигнатуре колец, будет обсуждаться позже.)

Лемма 1.1 (Лемма об однозначном анализе термов и формул) *Для данной сигнатуры Ω*

(1) Каждый терм есть либо константа, либо свободная переменная, либо имеет вид $f^n(t_1, \ldots, t_n)$ для единственного функционального символа f^n и термов $t_1, \ldots, t_n$.

(2) Каждая атомарная формула имеет вид $P^n(t_1, \ldots, t_n)$ для единственного предикатного символа P^n и термов $t_1, \ldots, t_n$.

(3) Для любой формулы C выполнено ровно одно из условий:

- *C — атомарная,*
- *Существует единственная пара формул A, B, такая что $C = (A \wedge B)$,*

- *Существует единственная формула A, такая что $C = \neg A$,*
- *Существует единственная переменная x и формула A, так что $C = \exists x\, A$.*

Доказательство опускаем.

Языки первого порядка: семантика

Определение 6 Модель сигнатуры L, *или* L-структура*, — это пара вида $M = (\underline{M}, \mathcal{I})$, где*

$\underline{M}$ *— непустое множество (*носитель модели*),*

$\mathcal{I}$ *— функция, определенная на множестве $Pr_L \cup Const_L \cup Fn_L$ (*интерпретирующая функция*), причем*

- $c \in Const_L \Rightarrow \mathcal{I}(c) \in \underline{M}$,
- $P^n \in P_L \Rightarrow \mathcal{I}(P^n) : \underline{M}^n \longrightarrow \{0, 1\}$
  (т.е. $\mathcal{I}(P^n)$ — n-местный предикат на $\underline{M}$*),*
- $f^n \in Fn_L \Rightarrow \mathcal{I}(f^n) : \underline{M}^n \longrightarrow \underline{M}$
  (т.е. $\mathcal{I}(f^n)$ — n-местная операция на $\underline{M}$*).*

В дальнейшем для заданной модели $M = (\underline{M}, \mathcal{I})$ пишем c_M, P_M, F_M соответственно вместо $\mathcal{I}(c), \mathcal{I}(P), \mathcal{I}(f)$ и $m \in M$ вместо $m \in \underline{M}$.

Определение 7 *Терм, не содержащий переменных (т.е. построенный из констант и функциональных символов), называется* замкнутым. *Для сигнатуры L множество всех замкнутых термов обозначается CTm_L.*

Для замкнутого терма t индукцией по длине определяется его значение в модели M*; оно обозначается $|t|_M$.*

- $|c|_M = c_M$ *для* $c \in Const_L$,
- $|f(t_1, \ldots, t_n)|_M = f_M(|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M)$
  для $f^n \in Fn_L$, $t_1, \ldots, t_n \in CTm_L$.

Пример Модель сигнатуры колец — это произвольное непустое множество $\underline{M}$ с выбранными как угодно элементами $0_M, 1_M$, предикатом $=_M$ и операциями $+_M, \cdot_M$. Она не обязана быть кольцом.

Если $M = \mathbf{N}$ с обычным пониманием символов $0, 1, +, \cdot$, то $|(1+1)\cdot 1|_M$ равно 2 (но символа 2 в нашей сигнатуре нет, это — элемент модели).

Если же $M = \mathbf{Z}_2$ (кольцо вычетов mod 2), то $|(1+1)\cdot 1|_M$ равно 0_M.

Определение 8 *Пусть α — слово в некотором алфавите, a — символ (буква) алфавита. Если $\alpha_i = a$, то говорят, что a входит в α на i-м месте.*

Вхождения переменной в формулу могут быть свободными и связанными.

- *Все вхождения переменных в атомарную формулу свободны.*
- *Свободные вхождения переменной x в формулу $\neg\varphi$ получаются из свободных вхождений x в φ сдвигом на 1; то же — для связанных вхождений.*
- *Свободные вхождения переменной x в формулу $(\varphi \wedge \psi)$ получаются из свободных вхождений x в φ сдвигом на 1 и из свободных вхождений x в ψ сдвигом на (длину φ +2).*
- *Свободные вхождения переменной y, отличной от x, в формулу $\exists x\, \varphi$ получаются из свободных вхождений y в φ сдвигом на 2; то же — для связанных вхождений y.*
- *Все вхождения x в $\exists x\, \varphi$ связаны.*

Определение истинности в модели

Пусть M — модель сигнатуры L; предполагаем, что ее носитель $\underline{M}$ состоит из совершенно новых элементов, которые не являются словами в языке L. Через $L \cup M$ обозначим *расширенную сигнатуру модели* M, которая получается из L добавлением множества новых констант $\underline{M}$; т.е. $Const_{L\cup M} = Const_L \cup \underline{M}$, в остальном же $L \cup M$ не отличается от L. [1]

Определение 9 *Пусть M — модель сигнатуры L.* Терм, оцененный в M *— это замкнутый терм расширенной сигнатуры M; аналогично,* формула, оцененная в M *— это замкнутая формула сигнатуры $L \cup M$.*

Согласно нашим обозначениям, $CTm_{L\cup M}$ — множество всех термов, оцененных в M; а $CFm_{L\cup M}$ — множество всех формул, оцененных в M.

[1] Техническое требование, чтобы все элементы из $\underline{M}$ были новыми, нужно для корректности дальнейших определений. Чтобы его обойти, для всех элементов можно ввести “новые имена”, т.е. добавить к $Const_L$ не $\underline{M}$, а другое множество, которое находится с ним в биективном соответствии и состоит из новых элементов. Мы не будем этим заниматься.

Определение 10 *Для терма t, оцененного в модели M, индукцией по длине определяется его* значение $|t|_M$*:*

- $|c|_M = c_M$ *для* $c \in Const_L$,
- $|m|_M = m$ *для* $m \in \underline{M}$,
- $|f(t_1, \ldots, t_n)|_M = f_M(|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M)$
  для $f^n \in Fn_L$, $t_1, \ldots, t_n \in CTm_{L \cup M}$.

Лемма 1.2 *Пусть M — модель сигнатуры L. Значения оцененных термов в M определены корректно. Это означает, что существует единственное отображение $t \mapsto |t|_M$ из $CTm_{L \cup M}$ в $\underline{M}$, удовлетворяющее условиям из определения 10.*

Доказательство Индукцией по длине t доказываем, что $|t|_M$ определяется однозначно.

Базис индукции: если t — константа L или $t \in M$, то все очевидно.

Шаг индукции. По лемме 1.1, $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ для единственного функционального символа f и термов $t_1, \ldots, t_n$. По предположению индукции, $|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M$ определены однозначно, и тогда $|t|_M = f_M(|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M)$ тоже задается однозначно. ∎

Определение 11 *Для формулы C, оцененной в модели M, индукцией по длине определяется ее* значение $|C|_M$*:*

- $|P(t_1, \ldots, t_n)|_M = P_M(|t_1|_M, \ldots, |t_n|_M)$
  для $P^n \in Fn_L$, $t_1, \ldots, t_n \in CTm_{L \cup M}$.
- $|A \wedge B|_M = \min(|A|_M, |B|_M)$,
- $|\neg A|_M = 1 - |A|_M$,
- $|\exists x\, A|_M = 1 \Leftrightarrow$ *существует* $m \in \underline{M}$, *такой что* $|[m/x]A|_M = 1$.

Здесь $[m/x]A$ обозначает оцененную формулу, полученную из A заменой всех свободных вхождений x на m. [2]

Заметим, что последний пункт определения можно записать и так:

$$|\exists x A|_M = \max_{m \in \underline{M}} |[m/x]A|_M.$$

[2] Строго говоря, надо доказывать, что это — действительно формула; доказательство рутинное, по индукции. В определении 11 предполагается, что формула $\exists x\, A$ замкнута, поэтому A не может содержать никаких свободных переменных, кроме x. И тогда $[m/x]A$ снова оказывается замкнутой.

Пример 1 Рассмотрим *сигнатуру колец*, содержащую равенство $(=)$, константы $0, 1$ и функциональные символы: $\cdot, +$ (2-местные).

В термах записываем их привычным образом: $t_1 \cdot t_2,\ t_1 + t_2$.

Рассмотрим формулу $\exists x(x \cdot x = 1 + 1)$ в моделях $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}$ (с обычным пониманием нуля, единицы, сложения и умножения). Имеем:

$$\mathbf{R} \models \exists x(x \cdot x = 1 + 1),$$

т.к.

$$\mathbf{R} \models \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1 + 1.$$

Отметим, что здесь возникает оцененная формула $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1 + 1$, с константами двух видов: 1 берется из исходной сигнатуры, а $\sqrt{2}$ — из модели; в сигнатуре колец такого символа нет.

С другой стороны,

$$\mathbf{Q} \models \neg\exists x(x \cdot x = 1 + 1),$$

т.к.

$$\mathbf{Q} \not\models r \cdot r = 1 + 1$$

для всех $r \in \mathbf{Q}$.