Задачи к спецкурсу "Введение в теорию моделей" (2017)

Все модели сигнатуры с равенством считаются нормальными.
Запись ($\boldsymbol{Q}$, <) означает ($\boldsymbol{Q}$, $<_Q$), т.е. модель сигнатуры {<} на множестве $\boldsymbol{Q}$. И т.п.

14. a) Докажите, что композиция гомоморфизмов - гомоморфизм.
    b) Докажите, что обратное отображение к изоморфизму - изоморфизм.
15. Докажите, что если все выполнимые расширения теории T логически эквивалентны T, то T полна.
16. (a) Докажите, что теория T полна, если и только если Mod(T) — минимальный Δ-элементарный класс (т.е. из $\mathrm{Mod}(T_1) \subseteq \mathrm{Mod}(T)$ следует $\mathrm{Mod}(T_1) = \mathrm{Mod}(T)$).
    (б) Установите биекцию между классами эквивалентности полных теорий в сигнатуре L (по отношению ~) и классами элементарной эквивалентности L-структур.
17. Найдите все множества, определимые в модели ($\mathbf{Q}$, <).
18. Найдите все множества, определимые в модели ($\mathbf{Q}$, <, 0, 1).
19. Найдите все множества, определимые в модели ($\mathbf{Q}$, +, =).
20. Докажите, что в сигнатуре {0, + , =} $\quad \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Q} \not\equiv \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$.
21. Рассмотрим $\mathbf{R}$ в сигнатуре с трехместным предикатом "между": $x \le y \le z \vee z \le y \le x$.

    Докажите, что четырехместный предикат конгруэнтности $|x-y|=|z-w|$ не определим в этой модели.
22. *Спектром* формулы A называется множество $\{n \in \mathbf{N}_+ \mid A$ имеет модель мощности $n\}$.
    a) Постройте формулу в сигнатуре {=}, спектр которой есть $\mathbf{N}_+ \setminus \{1, 3\}$.
    b) Постройте формулу в сигнатуре {=, f} (где f — одноместный функциональный символ), спектр которой есть множество всех положительных четных чисел.
23. Докажите, что в модели ($\mathbf{N}$, · , =) не определимы предикаты $(x < y)$ и $(z = x + y)$.
24. Докажите, что если полная теория в сигнатуре с равенством L содержит Eq_L и имеет конечную модель, то она сильно категорична.