

ЛИСТОК 4. РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

Анализ на многообразиях (весна 2017), срок сдачи — 21.03.2016

- 4◦1** Запишите матрицу Грама скалярного произведения (в указанных координатах) для следующих подмногообразий евклидового пространства.
- Эллипс $\phi \rightarrow (a \cos(\phi), b \sin(\phi))$.
 - Цилиндр $(\phi, h) \rightarrow (\cos(\phi), \sin(\phi), h)$.
 - Конус $(\phi, h) \rightarrow (h \cos(\phi), h \sin(\phi), ah)$.
 - Эллипсоид $(\phi, \theta) \rightarrow (a \cos(\theta) \cos(\phi), b \cos(\theta) \sin(\phi), c \sin(\theta))$.

Диффеоморфизм двух римановых многообразий, дифференциал которого в каждой точке сохраняет скалярное произведение, называется *изометрией*.

- 4◦2** Для следующих многообразий постройте *развёртку* — изометричную подмножеству евклидового пространства карту, покрывающую плотное подмножество.
- Для цилиндра.
 - Для конуса.

Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ — кривая в римановом многообразии. Определим её *длину* как $\int_0^1 \sqrt{(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$.

- 4◦3** Для $a, b \in M$ определим $d(a, b)$ как инфинум длин кривых, соединяющих a и b . Докажите, что $d(a, b)$ является метрикой на M .

Назовем *плоскостью Лобачевского* верхнюю полуплоскость $y > 0$ с римановой метрикой

$$ds^2 = \frac{1}{y^2} ((dx)^2 + (dy)^2).$$

- 4◦4** Сопоставим точке (x, y) комплексное число $z = x + iy$. Докажите, что дробно-линейное отображение $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ для $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$, отображает плоскость Лобачевского в себя и является изометрией.

- 4◦5** Найдите кратчайшую кривую, соединяющую две точки на плоскости Лобачевского
- предполагая, что их координаты x совпадают;
 - в общем случае

Подсказка: сведите этот пункт к предыдущему, используя дробно-линейные преобразования.

- 4◦6** Найдите расстояние $d(a, b)$ между точками плоскости Лобачевского.
- 4◦7** Докажите что никакая область на плоскости Лобачевского не изометрична области евклидового \mathbb{R}^2 .

Подсказка: составьте треугольник из линий минимальной длины.

Напомним, что для риманова многообразия с римановой метрикой g , имеющей в координатах x^i компоненты g_{ij} , символы Кристоффеля для связности Леви-Чивиты выражаются как

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{g^{im}}{2} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right),$$

где g^{ij} — обратная матрица к матрице метрического тензора.

Уравнение геодезической в координатах x^i записывается как:

$$\frac{d^2\gamma^i(t)}{dt^2} + \Gamma_{km}^i \frac{d\gamma^k(t)}{dt} \frac{d\gamma^m(t)}{dt} = 0,$$

где $\gamma^i(t)$ — координаты точек кривой.

- 4◦8** Для плоскости Лобачевского
- а)** найдите символы Кристоффеля;
- б)** решите уравнение геодезической.