Листок 3. Применение рядов Фурье к задачам математической физики

Анализ, 2 курс, **02.03.2017**

3◇1 Решите методом Фурье следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = x^2 - 1.$$

3◇2 Концы стержня $[0,1]$ поддерживаются при постоянных температурах $u|_{x=0} = u_1,\ u|_{x=1} = u_2$, а начальная температура равна $u|_{t=0} = u_0 = \text{const}$. Найти $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

3◇3 Решите методом Фурье следующую задачу для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = t, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0.$$

(Указание к 2 задачам: подберите и вычтите из неизвестной функции $u(x,t)$ такое частное решение этого уравнения, чтобы граничные условия разности стали нулевыми, и решите для этой разности уравнение с новыми начальными условиями.)

3◇4 Пусть $p(x) \in C^1[0,l]$, $p(x) > 0$ и $q(x) \in C[0,l]$, $q(x) \geqslant 0$. Рассматривается оператор Штурма–Лиувилля

$$L = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x),$$

с областью определения $D_L = \{y(x)\,|\,y(x) \in C^2[0,l],\ y(0) = y(l) = 0\}$.
а) Доказать, что оператор L симметричен в пространстве $L_2[0,l]$, т.е. $\forall y_1, y_2 \in D_L$

$$(Ly_1, y_2)_{L_2} = (y_1, Ly_2)_{L_2}.$$

б) Докажите, что если линейный оператор P симметричен в $L_2([0,l])$, то его собственные функции y_1 и y_2 ($Py_1 = \lambda_1 y_1,\ Py_2 = \lambda_2 y_2$), отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ортогональны, т.е. $(y_1, y_2)_{L_2} = 0$.

в) Докажите, что оператор Штурма-Лиувилля L положителен в пространстве $L_2[0,l]$, т.е. $\forall y \in D_L, y \neq 0,\ (Ly,y)_{L_2} > 0$, а все его собственные значения положительны и однократны, т.е. каждому собственному значению соответствует одномерное подпространство собственных функций.

(*Заметим, что собственные функции оператора Штурма–Лиувилля образуют полную ортогональную систему в* $L_2[0,l]$.)

3◇5 Решите следующие задачи Штурма–Лиувилля, т.е. найдите все функции $y(x)$ и значения λ, удовлетворяющие условиям:
а) $-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y'(l) = 0;$
б) $-y'' = \lambda y, \quad y(0) = y'(l) = 0.$
в) Доказать полноту в $L_2[0,l]$ этих систем собственных функций.

3◇6 Доказать, что задача Штурма–Лиувилля

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) - y(0) = 0,\ y(1) = 0,$$

имеет собственные значения $\{\mu_n^2\ \ n \in \mathbb{N}\}$, где μ_n – это все положительные корни уравнения $\mathrm{tg}(\mu) = -\mu$.

3◇7 $(*)$ Доказать, что дифференциальный оператор

$$A := -\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right]$$

является симметричным и положительным в пространстве $L_2[-1,1]$ с областью определения $D_A = \{y(x)\,|\,y(x) \in C^2[0,l]\}$ (граничные условия отсутствуют), а полиномы Лежандра $P_n(x),\ n = 0,1,\ldots,$ служат собственными функциями оператора A с собственными значениями $n(n+1)$. (*Заметим, что оператор* A *не порождает задачу Штурма-Лиувилля, т.к. здесь отсутствуют граничные условия, и, как можно проверить,* $P_n(1) = 1,\ P_n(-1) = (-1)^n$).

3◇8 Исходя из полноты ортогональной системы полиномов Лежандра в $L_2[-1,1]$, докажите, что у оператора A нет других собственных функций и собственных значений, кроме $P_n(x)$ и $n(n+1),\ n = 0,1,\ldots.$