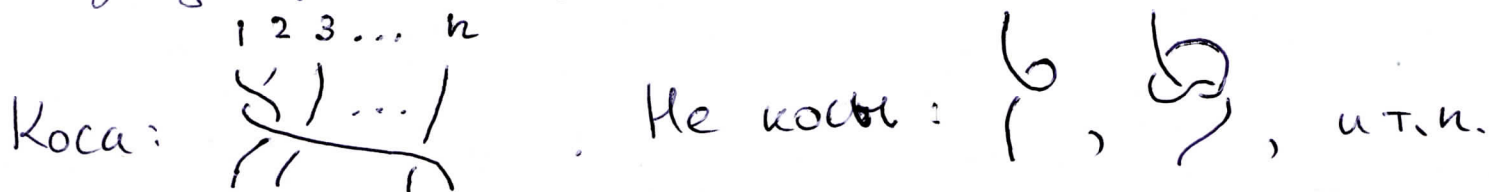


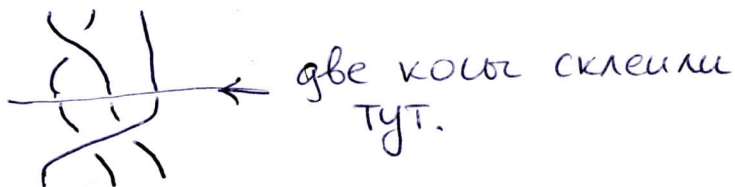
Группа кос

§1. Геометрическое представление.

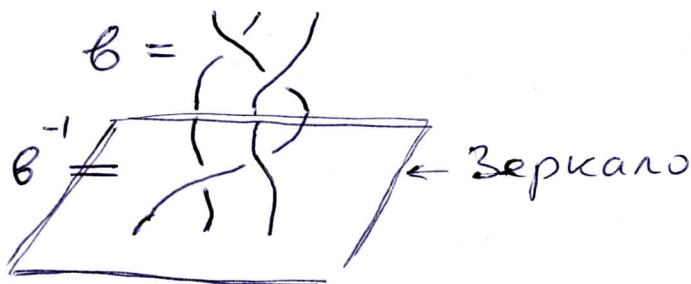
Интуитивно n -коса — это набор из n переплетенных между собой прокумерованных нитей. Нити нельзя завязывать в узлы. Примеры:



Умножение двух кос происходит путем "склеивания" верхних и нижних концов их нитей с одинаковыми номерами. Пример:



Это умножение ассоциативно и обратимо. Обратная коса получается отражением исходной в лежащем горизонтально зеркале:



n -косы образуют группу. При $n=1$ группа тривиальна. При $n=2$ - это бесконечная циклическая (абелева) группа. При $n > 2$ эта группа бесконечна и неабелева.

Дадим формально строгое определение группы кос:

Def 1 Конфигурационное пространство

$$\mathcal{P}_n := \{ (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j \ \forall i \neq j \}$$

$$\mathcal{B}_n := \mathcal{P}_n / S_n.$$

Здесь S_n - симметрическая группа, которая действует на наборах (z_1, z_2, \dots, z_n) перестановками.

Иными словами \mathcal{P}_n - пространство ^{упорядоченных} наборов из n попарно различных точек на плоскости (комплексная структура нам не важна).

\mathcal{B}_n - пространство таких же, но неупорядоченных наборов.

Def 2 Классическая группа кос (braid group) -

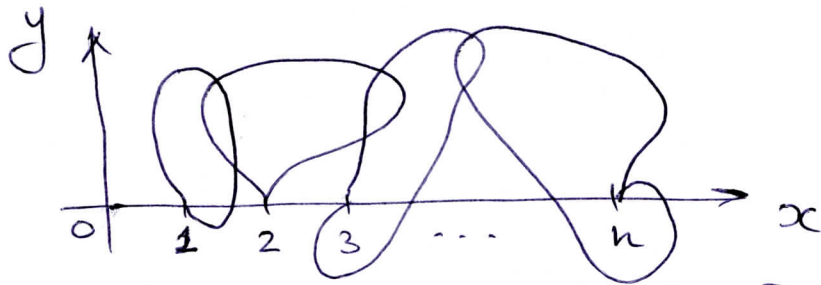
это фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{B}_n)$.

Группа краевых кос (pure braid group) -

это фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{P}_n)$

Поскольку конфигурационное пространство линейно связно, фундаментальные группы одинаковы для всех точек этих многообразий. (3)

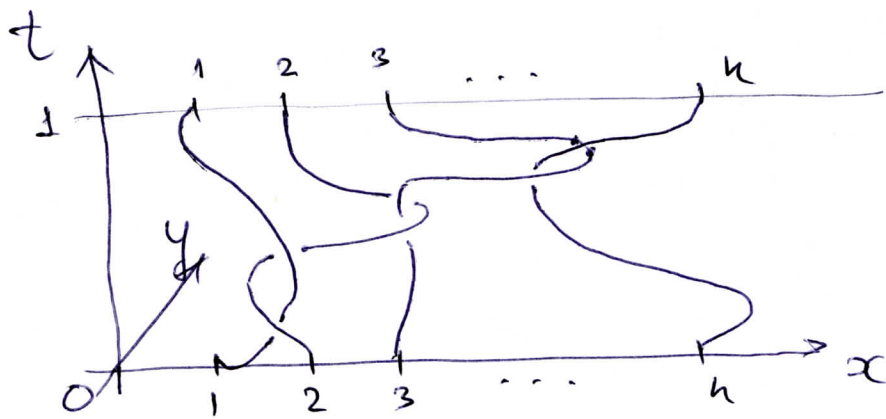
Нарисуем типичный элемент группы $\pi_1(\mathbb{R}^n)$ для точки $(1, 2, \dots, n)$:



Это набор петель $z_i(t)$, $t \in [0, 1]$ таких, что $z_i(0) = z_i(1) = i$, $i = 1, \dots, n$.

В каждый момент времени t точки на разных петлях не совпадают: $z_i(t) \neq z_j(t) \forall i \neq j$.

Чтобы это условие стало видным на нашей картинке, нарисуем петли в расширенном конфигурационном пространстве $\mathbb{C}^n \times [0, 1]$:





Получилась, так называемая, крашенная коса. Все её кити начинаются и кончаются в точках с одинако-

выши координатами:

$$z_i(0) = z_i(1) = i \quad \forall i.$$

Можно считать, что каждая нить этой косы имеет свой особый цвет, и при утолщении таких кос склеиваются нити одного цвета.

Для элементов группы $\pi_1(B_n)$ помраются похожие картинки в расширенном конфигурационном пространстве, с одним отличием: нити кос могут наливаться и заканчиваться в разных точках набора $(1, 2, \dots, n)$. Таким образом $\pi_1(B_n)$ — действительно группа классических ~~к~~ n -кос.

Реш. Однозначность проекции петель $z_i(t)$ на ось времени t исключает возможность появления картинок вида  или .

Очевидно, группа крашенных кос $\pi_1(P_n)$ является подгруппой $\pi_1(B_n)$. Нетрудно убедиться, что эта подгруппа нормальна. Фактор-

группа $\pi_1(B_n) / \pi_1(P_n) = S_n$ — это

симметрическая группа. Действительно, класс

смежности любой косы $\forall \pi_1(B_n)$ одност-

точно определяется данными о том, как

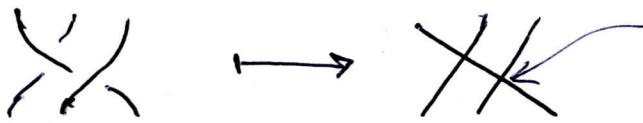
переставлены концы косы в $(z_1(1), z_2(1), \dots, z_n(1))$

по сравнению с их начальными $(z_1(0), \dots, z_n(0)) = \textcircled{5}$

$= (1, 2, \dots, n)$. То есть:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)) & \xrightarrow{\pi_1(\mathcal{P}_n)} & \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ z_1(1) & z_2(1) & \dots & z_n(1) \end{pmatrix} \\ \uparrow \pi_1(\mathcal{B}_n) & & \uparrow \mathcal{S}_n \end{array}$$

Или, в картинках:



Это обобщенная перестановка.
Порядок нумерации линий тут неважен.

Формулу факторизации $\pi_1(\mathcal{B}_n) / \pi_1(\mathcal{P}_n) = \mathcal{S}_n$ можно изобразить в виде короткой точкой последовательности групп:

$$\boxed{1 \rightarrow \pi_1(\mathcal{P}_n) \xrightarrow{\beta_n^{\Gamma}} \pi_1(\mathcal{B}_n) \xrightarrow{\beta_n^{\Gamma}} \mathcal{S}_n \rightarrow 1}$$

это каноническое вложение подгруппы в группу.

Отображение β_n^{Γ} имеет вид:

$$\boxed{\mathcal{B} = (z_1(t), \dots, z_n(t)) \xrightarrow{\beta_n^{\Gamma}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ z_1(1) & z_2(1) & \dots & z_n(1) \end{pmatrix}}$$

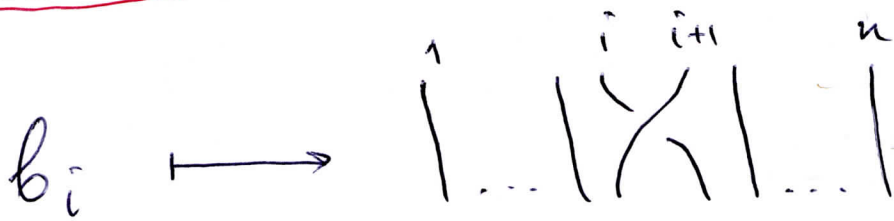
§2 Алгебраическое представление
(Emil Artin, 1925)

Рассмотрим набор букв $v_i, i=1 \dots n-1$.

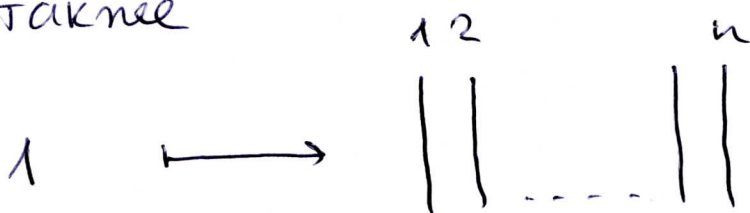
Будем считать, что этот набор букв порождает группу. То есть у каждой v_i есть обратная v_i^{-1} (вообще говоря, это новая буква), и есть единичная буква 1 :

$$v_i v_i^{-1} = v_i^{-1} v_i = 1. \quad (1)$$

Порождаемая группа содержит всевозможные слова, составленные из букв $v_i^{\pm 1}$. Пока это свободная группа. Нам не интересуют более специальная ситуация: мы сопоставим буквам картинки элементарных зацеплений из группы кос:



а также



Такое сопоставление уважает соотношения
обратимости (1):

$$\begin{array}{c} | \dots | \Sigma | \dots | \\ \hline | \dots | \Sigma | \dots | \end{array} = \begin{array}{c} | \dots | \Sigma | \dots | \\ \hline | \dots | \Sigma | \dots | \end{array} = \begin{array}{c} | \dots | | | | \dots | \\ \hline | \dots | | | | \dots | \end{array} \quad (1a)$$

Это сопоставление уважает и другие соотношения, которые мы можем представить к буквам v_i :

$$v_i v_j = v_j v_i \quad \forall i, j : |i-j| > 1 \quad (2)$$

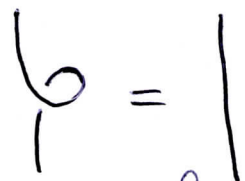
$$v_i v_{i+1} v_i = v_{i+1} v_i v_{i+1} \quad \forall i = 1, \dots, n-2. \quad (3)$$

Картанки, сопоставленные последним соотношением выглядят так:

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ \hline \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad (3a)$$

Def 3. Группа, порождаемая генераторами $v_i^{\pm 1}$, $i=1, \dots, n-1$, удовлетворяющими соотношениям (1), (2), (3) называется артиковой группой кос. В_n.

Соотношения (3) называются соотношениями кос (braid relations). (8)

Рем. Картинки преобразований эквивалентности кос (1a) и (3a), соответственно, называются движениями Рейдемейстера 2 и 3 типов. Вместе с движениями 1-го типа:  они позволяют любые две узловые диаграммы, отвечающие одному и тому же узлу, привести к одинаковому виду.

Соответствие генераторам $b_i^{\pm 1}$ картинок элементарных зацеплений i -й и $(i+1)$ -й нитей косы порождает гомоморфизм групп, обозначим его \hat{i}_n :

$$\boxed{B_n \xrightarrow{\hat{i}_n} \pi_1(B_n)}$$

Наша конечная цель в этом разделе: доказать, что \hat{i}_n — изоморфизм групп.

А пока сделаем отступление о различных способах задания B_n в терминах генераторов и соотношений. Число используемых при этом генераторов зависит от выбора способа задания.

Реализация B_n №2. Введем n -цикл

$$c_n := v_1 v_2 \dots v_{n-1} \xrightarrow{c_n} \begin{matrix} 1 & 2 & & n \\ \diagdown & \diagup & & \diagdown \\ & & \dots & \end{matrix}$$

Нетрудно убедиться, что с помощью этого элемента из элементарного заплетения v_1 можно породить все остальные:

$$v_2 = c_n v_1 c_n^{-1}, \dots, v_{i+1} = c_n^i v_1 c_n^{-i}$$

Упражнение 1: докажите, что B_n можно задать с помощью генераторов $v_1^{\pm 1}, c_n^{\pm 1}$, и выведите все соотношения для них

Реализация B_n №3 (Т. Вирман, К.Н. Ко, S.J. Lee 1998)

Определим генератора заплетения китей i и j , $i < j$

$$v_{ij} := (v_{j-1} v_{j-2} \dots v_{i+1}) v_i (v_{j-1} v_{j-2} \dots v_{i+1})^{-1}$$

Очевидно $v_{ii+1} = v_i$. Картинка v_{ij} :



Упражнение 2 Докажите, что B_n задается в терминах генераторов $v_{ij}^{\pm 1}$, $1 \leq i < j \leq n$, и


соотношений

/ См. Т. Вирман, К.Н. Ко, S.J. Lee
Advances in Math 139(1998)322-353/

$$\left\{ \begin{aligned} &v_{ij} v_{kl} = v_{kl} v_{ij}, \text{ если } (ij) \text{ и } (kl) \text{ разно-} \\ &\text{компонны на оси } \mathbb{Z} \text{ так:} \\ &\quad \begin{array}{cccc} i & j & k & l \\ \hline | & | & | & | \end{array}, \text{ или } \begin{array}{cccc} k & i & j & l \\ \hline | & | & | & | \end{array} \\ &v_{jk} v_{ij} = v_{ik} v_{jk} = v_{ij} v_{ik} \quad \forall i < j < k. \end{aligned} \right.$$

/J. Birman, K. H. Ko, S. J. Lee
Adv. Math 139 (1998) 322/

Для реализации группы крашенных кос в терминах генераторов и соотношений, нам нужны генераторы, эти картинки не представляют кокус китей коса. Подходят

$$A_{ij} = v_{ij}^2, \quad i < j \xrightarrow{i_n} \begin{array}{c} i \quad j \\ | \quad | \\ \dots \\ | \quad | \end{array}$$




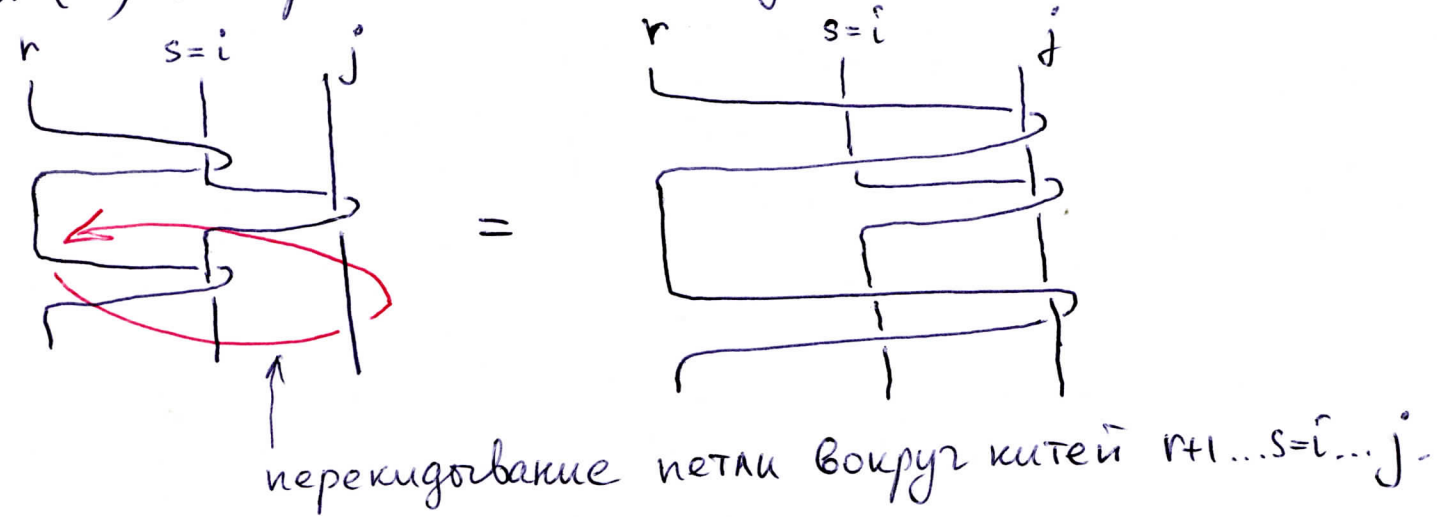
Def 4. Артикова группа крашенных кос P_n задаётся генераторами $A_{ij}^{\pm 1}, 1 \leq i < j \leq n$ и соотношениями:

$$\begin{aligned}
 A_{rs}^{-1} A_{ij} A_{rs} &= A_{ij}, \text{ если } \overline{r \quad s \quad i \quad j}, \text{ или } \overline{r \quad i \quad j \quad s} \\
 &= A_{rj} A_{ij} A_{rj}^{-1}, \text{ если } \overline{r \quad s=i \quad j} \\
 &= (A_{ij} A_{sj}) A_{ij} (A_{ij} A_{sj})^{-1}, \text{ если } \overline{r=i \quad s \quad j} \\
 &= (A_{rj} A_{sj} A_{rj}^{-1} A_{sj}^{-1}) A_{ij} (A_{rj} A_{sj} A_{rj}^{-1} A_{sj}^{-1})^{-1}, \text{ если } \overline{r \quad i \quad s \quad j}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Заметим, что сопряжение элемента A_{ij} элементом A_{rs} : $\overline{r \quad s < j}$ / левая часть / преобразуется этим соотношением в \mathbb{Z} мономы, все коэффициенты которых имеют вид $A_{*j}^{\pm 1}$.

Упражнение 3*: проверьте справедливость соотношений на A_{ij} для $A_{ij} = b_{ij}^2$.

В частности, простейшее из нетривиальных соотношений (4) в картинках имеет вид:



Зададим для артиновой группы кос B_n (12) отображение в симметрическую группу

$$B_n \xrightarrow{\beta_n^A} S_n$$

$$v_i \xrightarrow{\beta_n^A} \sigma_i = (i \ i+1)$$

↖ 2-циклоз

Как известно, симметрическая группа S_n порождается 2-циклами σ_i , $i=1, \dots, n-1$, удовлетворяющими соотношениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i-j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i^2 = 1. \end{array} \right. \quad (5)$$

(артиново представление S_n)

Знаки β_n^A — гомоморфизм группы.

Остается убедиться, что $\text{Ker } \beta_n^A = P_n$.

Дано, что $\text{Ker } \beta_n^A$ — это нормальная подгруппа в B_n , содержащая v_i^2 ($v_i \xrightarrow{\beta_n^A} \sigma_i^2 = 1$) —

нормальное замыкание набора v_i^2 , то есть всевозможные произведения элементов вида

$x v_i^{\pm 2} x^{-1} \quad \forall x \in B_n$. Очевидно, $A_{ij} = v_{ij}^2 \in \text{Ker } \beta_n^A$

и $\text{Ker } \beta_n^A$ является нормальным замыканием и набора A_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$.

Упражнение 4* Докажите, что $\text{Ker } \beta_n^A$. (13)

порождается набором A_{ij} $1 \leq i < j \leq n$, то есть

$$\boxed{\text{Ker } \beta_n^A = P_n} \quad (6)$$

Возможный путь доказательства:

а) доказать, что любое слово $w \in \text{Ker } \beta_n^A$ представимо в виде произведения слов $x v_i^{\pm 2} x^{-1}$, где x — есть слово вида $x = v_{k_1} v_{k_2} \dots v_{k_r}$, где $k_{j+1} \neq k_j$ (то есть в x нет гачей вида v_k^m с $m \neq \pm 1$).
/доказывается индукцией по числу букв в слове $x v_i^{\pm 2} x^{-1}$ /

б) проверить, что $\text{Ker } \beta_1^A = \{v_1^{\pm 2k}\} = P_1$;
 $\text{Ker } \beta_2^A$ порождается $A_{12}^{\pm 1} = v_1^{\pm 2}$, $A_{23}^{\pm 1} = v_2^{\pm 2}$, $A_{13}^{\pm 1} = v_2 v_1^{\pm 2} v_2^{-1}$

то есть $\text{Ker } \beta_2^A = P_2$.

Например: $v_1 A_{23} v_1^{-1} = A_{23}^{-1} A_{13} A_{23} \quad (a)$

$v_1 A_{13} v_1^{-1} = A_{23} \quad (b)$

Остается доказать (6) индукцией по n : в предполо-
~~жении~~жении, что $\text{Ker } \beta_m^A = P_m$, проверить

$\text{Ker } \beta_{m+1}^A = P_{m+1}$.

в) проверить, что где \forall $x = v_i^{\pm 2} x^{-1} \in \text{Ker } \beta_{m+1}^A$, слово x можно выбрать в виде $x = y v_m^\varepsilon z$, $\varepsilon = 0, 1$, где y, z не содержат v_m .

и затем свести x к виду ~~...~~

$\alpha =$ произведение слов $y \underbrace{v_m A_{ij} v_m^{-1}}_y y^{-1}$.

y не содержит v_m . A_{ij} , если $j < m$
 $A_{i m+1}$, если $j = m$

и убедиться, что $y A_{i m+1} y^{-1}$ сводится к произведению $A_{k m+1}^{\pm 1}$ (см. определяющие соотношения для P_n)

2) убедиться, что слова $x v_m^2 x^{-1}$ сводятся к произведению $A_{ij}^{\pm 1}$

Таким образом мы имеем еще одну короткую точную последовательность групп

$$1 \rightarrow P_n \xrightarrow{(A_{ij} \mapsto v_{ij}^2)} B_n \xrightarrow{\beta_n^A} S_n \rightarrow 1$$

А вместе с гомоморфизмом i_n (см. стр 6-8) мы получаем коммутативную диаграмму.

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \rightarrow & P_n & \rightarrow & B_n & \xrightarrow{\beta_n^A} & S_n \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow \text{сн/} P_n & & \downarrow i_n & & \downarrow \text{id} \\
 1 & \rightarrow & \pi_1(P_n) & \rightarrow & \pi_1(B_n) & \xrightarrow{\beta_n^{\Gamma}} & S_n \rightarrow 1
 \end{array}$$

это отображение тождественно, так как картинка X соответствует 2-циклу $\sigma_i = (i, i+1)$.

Отсюда, воспользовавшись известной леммой (15)

о 5 гомотопиях заключаем, что изоморфизм отображения i_n следует из изоморфизма его ограничения $i_n|_{P_n}$.

Последнее утверждение мы будем доказывать индукцией по n .

Рассмотрим отображение

$$\pi_1(P_n) \xrightarrow{\cong} \pi_1(P_{n-1})$$

заключающееся в удалении последней справа (n -ой) нити ~~конец~~ краешкой косы. Оно является гомоморфизмом групп. Ядро этого гомоморфизма состоит из n -кос, у которых левые $(n-1)$ нити не перемешаны между собой, а n -ая нить произвольным образом заплетается между ними. На картинку такой краешкой n -косы удобно взглянуть сверху:



То, что мы видим — это картинка элемента фундаментальной группы плоскости \mathbb{R}^2 с выколотыми $(n-1)$ ~~к~~ точками $\{1, 2, \dots, n-1\}$.

$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{1, 2, \dots, n-1\})$ — свободная группа с $(n-1)$ образующими. (16)

Определим аналог отображения Σ_n для артиковых краевых кос:

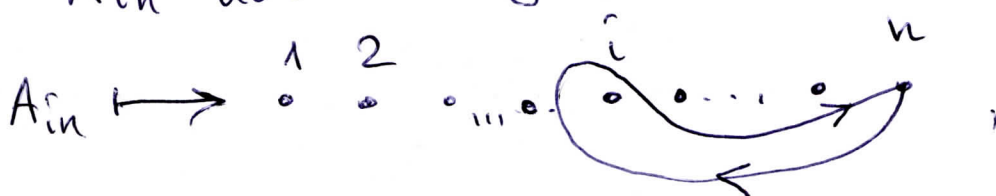
$$\boxed{P_n \xrightarrow{\Sigma_n^A} P_{n-1}}$$

На генераторах A_{ij} $\Sigma_n^A \rightarrow A_{ij}$, если $j < n$

$$A_{in} \xrightarrow{\Sigma_n^A} 1$$

На уровне картинок такое отображение действительно выглядит как стирание n -ой нити.

Ядро этого гомоморфизма — нормальное замыкание набора элементов $\{A_{1n}, A_{2n}, \dots, A_{(n-1)n}\}$ в P_n . То есть нормальная подгруппа, порожденная элементами вида $x A_{in}^{\pm 1} x^{-1}$, $\forall i < n, x \in P_n$. Из соотношений (4) для A_{ij} следует, что любой элемент вида $x A_{in}^{\pm 1} x^{-1}$ представим в виде моном $A_{i_1 n}^{\pm 1} A_{i_2 n}^{\pm 1} \dots A_{i_k n}^{\pm 1}$, то есть $\in \text{Ker } \Sigma_n^A$ порождается элементами $A_{in}^{\pm 1}$, $i=1, \dots, n-1$. Заметим, что при взгляде сверху картинке элементов A_{in} имеют вид



(17)

что соответствует генераторам свободной группы. Таким образом, группа $U_n = \langle A_{1n}, A_{2n}, \dots, A_{n-1n} \rangle$, порожденная набором A_{in} , также является свободной.

Мы получаем еще одну коммутативную диаграмму коротких точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & U_n = \langle A_{1n}, \dots, A_{n-1n} \rangle & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{\sum_{i=1}^n A_i} & P_{n-1} \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow i_n / \sigma_n & & \downarrow i_n / P_n & & \downarrow i_{n-1} / P_{n-1} \\
 1 & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{1, 2, \dots, n-1\}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{P}_n) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{P}_{n-1}) \longrightarrow 1
 \end{array}$$

Гомоморфизм i_n / σ_n двух свободных групп является изоморфизмом.

Так как $i_1 / P_1 = \text{id}$ ($\pi_1(\mathcal{P}_1) = P_1 = 1$), то индукцией по n с применением леммы о Бранчморфизмах заключаем: i_n / P_n — изоморфизм.

Мы доказали теорему Артика:

Теорема: Классическая (крашечная) группа кос имеет артиново представление:

$$\pi_1(\mathcal{B}_n) \cong \mathcal{B}_n \quad ; \quad \pi_1(\mathcal{P}_n) \cong P_n$$