Гладкие многообразия

С.М.Натанзон

Contents

1. Категория гладких многообразий

1.1. **Гладкие многообразия.** Анализ, который вы изучали на 1 курсе позволяет исследовать функции, на множествах с системой координат. Системы координат существуют, однако, лишь на областях гомеоморфных $\mathbb{R}^n$. Они не существуют,

в частности, на таких важнейших для приложений областях как сфера, тор и др. Для изучения функций на таких многообразиях надо наделить многообразие дополнительной структурой. Многообразие с такой дополнительной структурой называется гладким многообразием. Дадим теперь формальное определение.

Рассмотрим топологической пространство M. *Картой размерности* n на M называется пара (U, φ), где $U \subset M$ — открытое подмножество M и $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ гомеоморфизм на подмножество $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Семейство карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\alpha \in \Sigma\}$ называется атласом, если $\bigcup\limits_{\alpha\in\Sigma} U_\alpha = M$. Размерности всех карт атласа связного многообразия совпадают. Эту размерность мы будем называть размерностью многообразия. Далее, если не оговорено противное мы будем считать, что размерности всех компонент связности многообразия совпадают.

Карты $\{(U_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_1}\}$ и $\{(U_{\alpha_2}, \varphi_{\alpha_2}\}$ называются *пересекающимися*, если $U_{\alpha_1} \bigcap U_{\alpha_2} \neq \emptyset$. Пересекающимся картам отвечают непустые множества $V_1 = \varphi_{\alpha_1}(U_{\alpha_1} \bigcap U_{\alpha_2})$, $V_2 = \varphi_{\alpha_2}(U_{\alpha_1} \bigcap U_{\alpha_2})$ и гомеоморфизм $\varphi_{1,2} = \varphi_{\alpha_2}\varphi_{\alpha_1}^{-1} : V_1 \to V_2$. Отображения $\varphi_{1,2}$ называются *отображениями перехода*. Атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\alpha \in \Sigma\}$ называется *гладким* если все отображения перехода являются гладкими, то есть бесконечно дифференцируемыми функциями.

Гладки атласы $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\alpha \in \Sigma\}$ и $\{(U_\beta, \varphi_\beta)|\beta \in \Upsilon\}$ считаются *эквивалентными* если их объединение $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \{(U_\beta, \varphi_\beta)|\alpha \in \Sigma, \beta \in \Upsilon\}$ также является гладким атласом. Это условие эквивалентно тому, что все функции перехода между картами разных атласов являются гладкими.

Задача 1.1. *Постройте на* $\mathbb{R}$ *два не эквивалентных атласа.*

Класс эквивалентности гладких атласов называется *гладкой структурой.* Многообразие с гладкой структурой называется *гладким многообразием.* Приведем несколько простейших примеров гладких многообразий.

Пример 1.1. *Векторное пространство* $\mathbb{R}^n$ *обладает естественной картой, превращающей ее в гладкое многообразие.*

Пример 1.2. *График* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \subset \mathbb{R}^{n+1}|x \in X \subset \mathbb{R}^n\}$ *гладкой функции* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *обладает естественной картой* $\varphi : \Gamma_f \to X$, *где* $\varphi(x, f(x)) = x$.

Задача-пример 1.1. *Сфера* $S^n = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}| \sum\limits_{j=1}^{n+1}(x^j)^2 = 1\}$ *обладает атласом, состоящим из карт* (U_i^+, φ_i^+), (U_i^-, φ_i^-), *где* $i = 1, \ldots, n+1$. *Эти карты состоят из областей* $U_i^+ = \{x \in S^n|x_i > 0\}$, $U_i^- = \{x \in S^n|x_i < 0\}$ *и отображений* $\varphi_i^\pm(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1})$. *Докажите, что этот атлас гладкий* .

Задача-пример 1.2. *Зададим структуру гладкого многообразия на проективной плоскости* $\mathbb{R}P^2$. *Будем представлять ее как множество прямых в* $\mathbb{R}^3$. *Каждая из них определена вектором с координатами* (x, y, z), *причем пропорциональные вектора задают одну и ту же прямую. Рассмотрим на* $\mathbb{R}P^2$ *атлас из 3 карт* (U_1, φ_1), (U_2, φ_2), (U_3, φ_3), *где* $U_1 = \{(x, y, z)|x \neq 0\}$, $U_2 = \{(x, y, z)|y \neq 0\}$, $U_3 = \{(x, y, z)|z \neq 0\}$, $\varphi_1(x, y, z) = (\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$, $\varphi_2(x, y, z) = (\frac{x}{y}, \frac{z}{y})$, $\varphi_3(x, y, z) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. *Докажите, что этот атлас гладкий. Постройте гладкий атлас для* $\mathbb{R}P^n$.

1.2. **Морфизмы и изоморфизмы.** Займемся теперь отображениями гладких многообразий. Рассмотрим гладкие многообразия M_1, M_2 размерности n и m вместе с атласами $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\alpha \in \Sigma\}$, $\{(U_\beta, \varphi_\beta)|\beta \in \Upsilon\}$, задающими на них гладкие структуры. Отображение $F : M_1 \to M_2$ называется гладким, если гладким является его описание в картах атласов. Опишем это свойство подробнее.

Рассмотрим точки $a \in M_1$, $b = F(a) \in M_2$ и содержащие их карты $a \in U_\alpha$, $b \in U_\beta$. Рассмотрим области $X = \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ и $Y = \varphi_\beta(U_\beta \bigcap F(U_\alpha)) \subseteq \mathbb{R}^m$. Отображение F называется *гладким в точке* a, если отображение $G = \varphi_\beta F \varphi_\alpha^{-1} : X \to Y$ гладко (т.е. бесконечно дифференцируемо) в точке $\varphi_\alpha(a)$. Отображение гладкое в каждой точке $a \in M_1$ называется гладким. Именно такие отображения и являются морфизмами в категории гладких многообразий.

Задача 1.2. *Докажите, что гладкости в точке не зависит от выбора, содержащей ее карты и не меняется при замене атласа на эквивалентный.*

Гладкое отображение гладкого многообразия на вещественную прямую $\mathbb{R}$ со стандартной гладкой структурой называется *гладкой функцией.*

Гомеоморфизм между гладкими многообразиями $F : M_1 \to M_2$ называется *диффеоморфизмом*, если он и обратный к нему $F^{-1} : M_2 \to M_1$ являются гладкими. Другими словами, диффеоморфизм – это изоморфизм в категории гладких многообразий. Гладкие многообразия между которыми существует диффеоморфизм называются *диффеоморфными.* Гладкие функции и отображения на них обладают одинаковыми свойствами. Диффеоморфизм порождает, в частности, отображение $f \mapsto fF$, реализующий изоморфизм между алгебрами гладкие функции на M_2 и M_1.

Задача-пример 1.3. *Рассмотрим проекцию* $F : (x^1, \ldots, x^{n+1}) \mapsto (x^1, \ldots, x^n)$ *рассмотренной выше сферы* $S^n = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum\limits_{j=1}^{n+1} = 1\}$ *на шар* $T^n = \{x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n | \sum\limits_{j=1}^{n} (x^j)^2 \leq 1$. *Докажите, что* f *— гладкое отображение, но не диффеоморфизм.*

Замечание 1.1. *Гомеоморфные гладкие многообразия не обязательно диффеоморфны, но примеры таких многообразий достаточно сложны.*

1.3. **Задание многообразий уравнениями.** В приложениях гладкие многообразия часто возникают как множества уровня $\{x \in U \subset \mathbb{R}^n | f(x) = c\}$ гладких функций $f : U \to \mathbb{R}$. Сферу S^n из примера 1.1 можно рассматривать, например, как поверхность уровня $f(x) = 1$ для $f(x) = (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2$. Не все множества уровня образуют, однако, гладкие многообразия.

Пример 1.3. *Множество уровня* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (f(x, y) = c\}$ *функции* $f(x, y) = x^2 - y^2$ *не является многообразием при* $c = 0$, *поскольку совпадает в этом случае с объединение пересекающихся прямых* $x + y = 0$ *и* $x - y = 0$.

Следующая теорема дает простой критерий, когда множества уровня является гладким многообразием.

Теорема 1.1. *Рассмотрим гладкую функцию* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и ее множество уровня* $M_c = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = c\}$, *где* $c \in \mathbb{R}$. *Предположим, что градиент функции*

$\mathtt{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n})$ *не обращается в 0 на* M_c. *Тогда* M_c *— гладкое многообразие размерности* $n-1$. *Пусть* $x_0 \in M_c$. *Из условия* $\mathtt{grad} f(x_0) \neq 0$ *следует, что* $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \neq 0$ *для некоторого* i. *Тогда в окрестности точки* x_0 *существует локальная карта вида* (U_i, φ_i), *где* $\varphi_i(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$.

Proof. Пусть $(x_0^1, \dots, x_0^n)$ — координаты токи x_0 в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \neq 0$. Рассмотрим точку $v_0 = (x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Согласно теореме о неявной функции существует окрестность $v_0 \in V_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$, интервал $(x_0^i - \delta, x_0^i + \delta)$ и гладкая функция $y^i : V_i \to \mathbb{R}$ такие что:

- $x_0^i = y^i(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n)$;
- $|x_0^i - y^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)| < \delta$ на V_i;
- множество $U_i = M_c \bigcap (V \times (x_0^i - \delta, x_0^i + \delta)) \subset \mathbb{R}^n$ совпадает с множеством $\{(x^1, \dots, x^{i-1}, y^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n), x^{i+1}, \dots, x^n | (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \subset V_i\}$.

Возьмем теперь пару (U_i, φ_i) в качестве карты в окрестности точки x_0. Это возможно, поскольку $\varphi_i(U_i) = V_i$ и обратное отображение задается равенством $\varphi_i^{-1}(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^{i-1}, y^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n), x^{i+1}, \dots, x^n)$.

Отображение перехода $\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \bigcap U_j) \to V_j$ имеет вид $(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n) \mapsto (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^{j-1}, \tilde{x}^{j+1}, \dots, \tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^k = x^k$ при $k \neq i$ и $\tilde{x}^i = y^i(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$ и, следовательно, гладкое. □

Используем эту теорему, чтобы определить структуру гладкого многообразия на *специальной линейной группе* $SL(n, \mathbb{R})$, то есть на группе всех квадратных матриц с порядка n определителем 1. Группа $SL(n, \mathbb{R})$ вложена в множество $M_n(\mathbb{R}) = \{A = \{a_{ij}\} | a_{ij} \in \mathbb{R}$ всех квадратных матриц $A = \{a_{ij}\}$ порядка n. Множество $M_n(\mathbb{R})\}$ можно рассматривать как векторное пространство $\mathbb{R}^{n^2}$ с координатами $\{a_{ij}\}$. Группа $SL(n, \mathbb{R})$ является тогда множеством уровня $f(A)$=1 функции $f(A) = \det A$. Таким образом, мы определим на $SL(n, \mathbb{R})$ структуру гладкого многообразия, если докажем, что $\mathtt{grad} f$ не обращается в 0 на $SL(n, \mathbb{R})$.

Докажем сначала, что $\mathtt{grad} f$ не обращается в 0 на единичной матрице E. Разложив определитель по строке находим что

$$f(A) = \det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}.$$

Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial a_{11}}(A) = \det A_{11}$ и $\frac{\partial f}{\partial a_{11}}(E) = 1$.

Рассмотрим теперь произвольную точку $A_0 \in SL(n, \mathbb{R})$. Введем на множестве $M_n(\mathbb{R})$ новые переменные, сопоставив матрице $A = (\{a_{ij}\})$ числа $\{b_{ij}\}$, образующие матрицу $B = A_0^{-1} A$. Тогда $A(\{b_{ij}\}) = A_0 B$ и $f(A) = \det(A_0 B) = \det(A_0) \det(B) = \det(B) = f(B)$. Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial b_{11}}(B) = \frac{\partial f}{\partial b_{11}}(A(\{b_{ij}\})) = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A) \frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{11}}$$

и, в частности,

$$\frac{\partial f}{\partial b_{11}}(E) = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A_0) \frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{11}}.$$

Левая часть равенства, как уже доказано, не равна 0. Следовательно, не равен 0 и градиент $\mathtt{grad} f$ в точке A_0.

Теорема 1.1 обобщается на случай гладких отображений $f = (f^1, \dots, f^m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Роль градиента играет в этом случае матрица Якоби

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Теорема 1.2. *Рассмотрим гладкую функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, где $n > m$, и ее множество уровня $M_c = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = c\}$, где $c \in \mathbb{R}^m$. Предположим, что ранг матрицы Якоби $\mathtt{rang}(df)$ равен m на M_c. Тогда M_c — гладкое многообразие размерности $n - m$. Из условия $\mathtt{rang}(df(x_0)) = m$ следует, что существуют номера $J = (j_1, \dots, j_m) \subset \{1, \dots, n\}$ такие, что отвечающие им столбцы матрицы $df(x_0)$ линейно независимы. Рассмотрим столбцы не вошедшие в этот список $I = (i_1, \dots, i_{n-m}) = \{1, \dots, n\} \setminus J$. Тогда в окрестности точки x_0 существует локальная карта вида (U_I, φ_I), где $\varphi_I(x_1 \dots, x_n) = (x_{i_1} \dots, x_{i_{n-m}})$*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1.1 с использованием теоремы о неявном отображении вместо теоремы о неявной функции.

Задача 1.3. *Доказать теорему 1.2.*

Задача 1.4. *Построить структуру гладкого многообразия на двумерном торе $\{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 | (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1; (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\}$.*

2. Касательное пространство

2.1. **Касательные векторы.** Для гладких многообразий $M \subset \mathbb{R}^N$ (например заданных в $\mathbb{R}^N$ уравнениями) касательное пространство T_p в точке $p \in M$ имеет очевидный геометрический смысл. Это плоскость в $\mathbb{R}^N$ размерности $\dim M$ касающаяся M в точке p. Это пространство можно представлять себе также как множество касательных к гладким путям $\gamma : [0, 1] \to M \subset \mathbb{R}^N$, выходящих из точки p. Касательные к двум таким путям γ_1 и γ_2 совпадают, если и только если

$$\frac{d\gamma_1}{dt}(0) = \frac{d\gamma_2}{dt}(0).$$

Это условие выполняется если и только если совпадают линейные приближения отображений γ_1 и γ_2. То есть

$$(\gamma_1 - \gamma_2)(t) = O(t^2) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Мы будем называть такие пути γ_1 и γ_2 *эквивалентными*. Таким образом, касательное пространство T_p для гладкого многообразия M вложенного в $\mathbb{R}^N$ можно понимать как совокупность классов эквивалентности гладких путей выходящих из $p \in M$.

Заметим теперь, что это определение легко переносится на произвольное гладкое многообразие M. Гладкое отображение $\gamma : [0, 1] \to M$, где $\gamma(0) = p$, мы будем называть гладким путем из точки p. Рассмотрим содержащую p локальную карту $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ такую, что $\varphi(p) = 0$. Пути γ_1 и γ_2 назовем *эквивалентными*, если пути на $\mathbb{R}^n$ $\varphi\gamma_1$ и $\varphi\gamma_2$ эквивалентны.

Задача 2.1. *1) Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$. Докажите что пути γ_1 и γ_2 эквивалентны ,если и только, если дифференциалы отображений $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to M$ совпадают.*

2)Доказать, что эквивалентность путей не меняется при замене локальной карты. То есть при замене φ на суперпозицию $g \circ \varphi$ с диффеоморфизмом $g : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$, сохраняющим 0.

Класс эквивалентности путей называется *касательным вектором в точке p*. Множество касательных векторов T_p называется *касательным пространством* многообразия M в точке p.

Задача 2.2. *Касательное пространство имеет структуру векторного пространства относительно сложения $\varphi^{-1}(\varphi\gamma_1 + \varphi\gamma_2)$ и умножения на константу $\varphi^{-1}k(\varphi\gamma)$. Эта структура не зависит от выбора карты (U, φ)*

Задача 2.3. *Пусть $F : U \to V$ — диффеоморфизм гладких многообразий. Докажите, что соответствие путей $\gamma(t) \to \varphi\psi(t)$ порождает изоморфизм векторных пространств $F_* : T_p \to T_{F(p)}$.*

Пример 2.1. *Опишем касательное пространство в точке 0 к многообразию $\mathbb{R}^n$. Сопоставим каждому вектору $v \in \mathbb{R}^n$ путь $\gamma_v(t) = tv$. Эти пути не эквивалентны для разных векторов. С другой стороны, согласно формуле Тейлора, любой путь $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ с началом в 0 эквивалентен пути γ_v, где $v = (\frac{\partial x^1(t)}{\partial t}(0), \dots, \frac{\partial x^n(t)}{\partial t}(0))$. Таким образом, пространство $T_0\mathbb{R}^n$ естественно отождествляется с самим $\mathbb{R}^n$. Вектор касательного пространства отвечающий стандартному базисному вектору e_i обозначается $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Он отвечает пути $\gamma(t) = (0, \dots, 0, x^i(t), 0, \dots, 0)$.*

2.2. **Операторы дифференцирования в точке.** Обозначим через $\mathcal{F}_U$ алгебру гладких функций на U.

Задача 2.4. *Пусть $F : U \to V$ — диффеоморфизм гладких многообразий. Докажите, что соответствие функций $g \to gF$ порождает изоморфизм изоморфизм алгебр функций $F^* : \mathcal{F}_V \to \mathcal{F}_U$.*

Функционал $X = \mathcal{F}_U \to \mathbb{R}$ со свойствами

$$X(f+g) = X(f) + X(g); \quad X(kf) = kX(f) \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{R};$$

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

называется *дифференцированием в точке $p \in M$*. Обозначим через Diff_p множество всех дифференцирований в точке p.

Задача 2.5. *1) Докажите, что дифференциал константы равен нулю.*

2)Докажите, что дифференцирования в точке образуют векторное пространство.

3) Пусть $F : U \to V$ — диффеоморфизм гладких многообразий. Докажите, что соответствие функционалов $X \to XF^*$ порождает изоморфизм $\mathrm{Diff}_p \to \mathrm{Diff}_{\varphi(p)}$.

Наша ближайшая цель доказать, что касательное пространство T_p естественно изоморфно векторному пространству дифференцирований в точке p. Построим отображение $\Phi : T_p \to \mathrm{Diff}_p$. Рассмотрим произвольный вектор $v \in T_p$. Выберем

представляющий его путь $\gamma : [0,1] \to U$ с началом в точке p и сопоставим ему функционал

$$\Phi(v) = X_v : \mathcal{F}_U \to \mathbb{R}, \quad \text{где} \quad X_v(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))(0)$$

Задача 2.6. *1) Докажите, что оператор X_v не зависит от выбора представляющего его пути γ и является дифференцированием в точке p.*

2) Докажите, что вектору $\frac{\partial}{\partial x^i}$ из примера 2.1 отвечает дифференцирование $\Phi(\frac{\partial}{\partial x^i})(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

Теорема 2.1. *Отображение $\Phi : T_p \to Diff_p$ является изоморфизмом векторных пространств.*

Proof. Согласно задачам 2.3 и 2.5 утверждение теоремы достаточно доказать для $U \subset \mathbb{R}^n$ и $p = 0$. Гомоморфность отображения Φ следует из свойств дифференцирования

$$X_{v_1+v_2}(f) = (\gamma^1 + \gamma^2)_p(f) = \frac{d}{dt} f((\gamma^1 + \gamma^2)(t))(0) = \frac{d}{dt} f(\gamma^1(t) + \gamma^2(t))(0) =$$

$$f'(0)(\gamma^1(t) + \gamma^2(t))'(0) = f'(0)(\gamma^1(t))'(0) + f'(0)(\gamma^2(t))'(0) =$$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma^1(t))(0) + \frac{d}{dt} f(\gamma^2(t))(0) = (\gamma^1_p(f) + (\gamma^2)_p(f) = X_{v_1}(f) + X_{v_2}(f).$$

Свойство $X_{kv} = kX_v$ доказывается аналогично.

Докажем, что Φ — изоморфизм. Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ координаты точек пространства $\mathbb{R}^n$ в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ и $\tilde{p} = (x^1_0, \ldots, x^n_0)$. Тогда для произвольной гладкой функции f на U формула Тейлора дает разложение

$$f(x^1, \ldots, x^n) = f(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) x^i + r_2(x),$$

где $r_2(x) = \frac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\theta x) x^i x^j$ — остаточный член в форме Лагранжа. Таким образом,

$$X(f) = f(0)X(1) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) X(x^i) + \sum_{i,j=1}^n X(h_{ij}(x) x^i x^j),$$

где h_{ij} — гладкие функции. Первые и последние слагаемые этой суммы равны 0 в виду правила Лейбница для X. Следовательно,

$$X(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) v^i,$$

где $v^i = X(x^i)$. Таким образом, X — это дифференцирование по пути $\gamma(t) = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) v^i t$. Это дифференцирование совпадает с X_v, где $v = \sum\limits_{i=1}^n v^i e_i$. Разные вектора порождают разные дифференцирования. Отсюда следует единственность вектора v. $\square$

2.3. **Координатное описание касательного вектора.** Рассмотрим в окрестности точки $p \in M$ карту $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ такую, что $\varphi(p)$. Согласно задаче 2.3, карта (U, φ) порождает естественный изоморфизм между T_pM и $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$. С другой стороны, согласно примеру 2.1, векторные пространства $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n$ естественно изоморфны. Таким образом, локальная карта позволяет сопоставить касательному вектору $v \in T_pM$ вектор $(\xi^1, \ldots, \xi^n) = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathbb{R}^n$. Согласно задаче 2.6 ему отвечает дифференцирование $f \mapsto \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Набор чисел $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ называется *координатами касательного вектора* v в карте (U, φ).

Введем теперь важное обозначение, которое делает вычисления значительно менее громоздкими. Если в мономе встречаются 2 одинаковых индекса (например индекс i меняющийся от 1 до n) причем один из индексов сверху, а другой снизу, то такой моном означает суммирование мономов такого типа для всех индексов во всем диапазоне изменения индекса. Например $\xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ **будет означать** $\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Посмотрим теперь как меняются координаты касательного вектора при замене локальной карты. Рассмотрим принадлежащие гладкому атласу и содержащие точку p карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ и $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$, где $\varphi(p) = \tilde{\varphi}(p) = 0$. В произвольной точке $q \in U \bigcap \tilde{U}$ функции имеют вид $\varphi(q) = \{(x^1(q), \ldots, x^n(q))\}$ и $\tilde{\varphi}(q) = \{(\tilde{x}^1(q), \ldots, \tilde{x}^n(q))\}$. Функция перехода $\tilde{\varphi}\varphi^{-1} : \varphi(U \bigcap \tilde{U}) \to \tilde{\varphi}(U \bigcap \tilde{U})$ задается гладкими функциями координат $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x)$ и значит

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}.$$

Рассмотрим теперь произвольный касательный вектор v. Пусть его координаты в локальной карте (U, φ) равны $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$. Тогда

$$v = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} = \xi^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} = \tilde{\xi}^j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}.$$

Таким образом, координаты вектора v в локальной карте $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ равны

$$\tilde{\xi}^j = \xi^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}.$$

Следовательно, касательный вектор в точке $p \in M$ можно определить как операцию, сопоставляющую каждой локальной карте (U, φ) координатный вектор

$$(\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$$

таким образом, что при гладкой замене карты вида $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x)$ он переходит в координатный вектор

$$(\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^n) = (\xi^i \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i}, \ldots, \xi^i \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^i}) \in \mathbb{R}^n.$$

Это определение, несмотря на всю свою громоздкость, оказывается очень удобным при конкретных вычислениях.

2.4. **Дифференциал отображения.** Гладкое отображение $F : M_1 \to M_2$ порождает линейное отображение касательных пространств $dF_p : T_p \to T_{F(p)}$, которое и называется *дифференциалом отображения F в точке p*. Мы определяли касательное пространства 3 разными способами. Проследим как строится дифференциал при разных определениях касательного пространства.

Пусть мы определяем вектор $v \in T_p$ как класс эквивалентных путей из точки $p \in M_1$. Пусть $\gamma : [0,1] \to M_1$ один из таких путей. Под действие F он переходит в путь $(F\gamma) : [0,1] \to M_1$, некоторый путь с началом в точке $F(p)$. Отвечающий ему вектор из $T_{F(p)}$ и будет считаться образом $dF_p(v)$ вектора v под действием дифференциала dF_p (см. задачу 2.3).

Если мы рассматриваем вектор из T_p как дифференцирование X в точке $p \in M_1$, его образ $dF_p(X)$ под действием дифференциала dF_p определяется как дифференцирование в точке $F(p) \in M_2$, которое действует на функцию $g \in \mathcal{F}_V$, определенную в окрестности V точки $F(p)$, по правилу $(dF_p(X))(g) = X(gF)$ (см. задачу 2.5 и теорему 2.1).

Выясним теперь что означает дифференциал при интерпретации касательных векторов $\xi \in T_p$ и $\tilde{\xi} \in T_{F(p)}$ как элементов арифметических пространств, связанных с локальными картами (U, φ) и $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$. Мы считаем, что $\tilde{U} = F(U)$ и $\varphi(p) = \tilde{\varphi}(F(p)) = 0$. В виду того, что отображения φ и $\tilde{\varphi}$ реализуют диффеоморфизмы между U, $\tilde{U}$ и $\varphi(U)$, $\tilde{\varphi}(\tilde{U})$, чтобы усложнять обозначения, можем отождествить U и $\tilde{U}$ с их образами и считать, что

$$U \subset \mathbb{R}^n = \{x = (x^1, \dots, x^n)\},$$

$$\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m = \{\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)\}.$$

$$p = F(p) = 0, \quad F(x) = (F^1(x), \dots, F^m(x)).$$

Согласно нашим определениям, вектору $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ отвечает дифференцирование в 0

$$\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} : \mathcal{F}_U \to \mathbb{R} \quad \text{такое, что} \quad \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) \quad \text{для} \quad f \in \mathcal{F}_U.$$

Дифференциал dF_0 переводит это дифференцирование в дифференцирование

$$(dF_0(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}))(\tilde{f}) = (\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i})(\tilde{f}F) = \xi^i \frac{\partial(\tilde{f}F)}{\partial x^i}(0) \quad \text{для} \quad \tilde{f} \in \mathcal{F}_{\tilde{U}}.$$

Используя правило дифференцирования сложной функции находим что

$$\xi^i \frac{\partial(\tilde{f}F)}{\partial x^i}(0) = \xi^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}^j}(0) \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) = \xi^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}^j}(0) = \tilde{\xi}^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}^j}(0),$$

где

$$\tilde{\xi}^i = \xi^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) \quad \text{координаты вектора} \quad dF_0(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}) \quad \text{в карте} \quad \tilde{U}.$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}^1 \\ \\ \tilde{\xi}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(0) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(0) & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \\ \xi^m \end{pmatrix},$$

то есть $\tilde{\xi} = dF(\xi)$ где

$$dF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(0) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(0) & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(0) \end{pmatrix}$$

— дифференциал отображения F в точке 0(линейное приближение отображения F в точке 0).

Задача 2.7. *Найти дифференциал линейного оператора.*

3. Гладкие отображения

3.1. **Регулярные точки отображения.** Рассмотрим гладкое отображение $F : M_1 \to M_2$ гладких многообразий M_1 и M_2. Точка $p_0 \in M_1$ называется *регулярной точкой отображения* F, если гомоморфизм $dF_{p_0} : T_{p_0}M_1 \to T_{F(p_0)}M_2$ является эпиморфизмом. Точка $q_0 \in M_2$ называется *регулярным значение отображения* F, если или $q_0 \in M_2 \setminus F(M_1)$, или все точки прообраза $F^{-1}(q_0)$ являются регулярными точками отображения F.

Из определения сразу следует, что регулярных точек не существует, если $\dim M_1 \leq \dim M_2$. Более того, при $\dim M_1 \geq \dim M_2$ точка регулярна, если и только если ранг дифференциала в этой точке равен $\dim M_2$. Кроме того, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $q_0 \in F(M_1)$ — регулярное значение гладкого отображения $F : M_1 \to M_2$. Тогда $M_3 = F^{-1}(q_0)$ гладкое многообразие размерности $\dim M_3 = \dim M_1 - \dim M_2$. Более того, локальные координаты в окрестности $p_0 \in F^{-1}(q_0) \subset M_1$ можно выбрать таким образом, чтобы часть из них образовывала локальные координаты на M_3.*

Proof. Пусть $F(p_0) = q_0$. Рассмотрим на M_1 и M_2 достаточно маленькие локальные карты $U \ni p_0$ и $V \ni q_0$. Они задают в окрестностях точек p_0 и q_0 локальные координаты $(x^1, \dots, x^n)$ и $(y^1, \dots, y^m)$, где $n = \dim M_1$ и $m = \dim M_2$. Можно считать, что координаты точек p_0 и q_0 равны 0.

В этих координатах отображение F запишется в виде отображения

$$f = (f^1, \dots, f^m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Содержащая точку $p_0 = 0$ компонента связности множества $M_3 = F^{-1}(q_0) = f^{-1}(0)$ описывается уравнением $f(0) = 0$. Другими словами, это точки $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$f^i(x^1, \dots, x^n) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Но тогда утверждение о гладкости многообразия M_3 следует из теоремы 1.2. □

Пусть M гладкое n-мерное многообразие. Множество $A \subset M$ называется *k-мерным подмногообразием*, если для любой точки $p \subset A$ существует содержащая ее карта (U, φ) на M такая, что $\varphi(U \bigcap A) = \varphi(U) \bigcap \mathbb{R}^k$.

Задача 3.1. *Используя теорему 3.1 докажите, что: прообраз регулярной точки является подмногообразием.*

3.2. **Теорема Сарда.** В этом разделе мы докажем важную теорему, доказанную американским математиком А.Сардом в 1942 году.

Перенесем сначала определение множеств (лебеговой) меры 0 с подмножеств в $\mathbb{R}^n$ на подмножества гладкого многообразия N. По определению, мы говорим, что *подмножество $A \subset N$ имеет меру* 0, если для любой карты (U, φ) многообразия N множество $\varphi(A \bigcap U) \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру 0.

Следующая задача доказывает инвариантность определения множества меры 0 относительно диффеоморфизмов.

Задача 3.2. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, регулярное на множестве $A \subset U$ меры 0. Тогда $f(A)$ тоже имеет меру 0.*

Не регулярная точка гладкого отображения $f : M \to N$ называется критической. Другими словами, точка $x \in M$ называется *критической*, если дифференциал $df_x : T_x \to T_{f(x)}$ имеет ранг меньший $\dim N$. Образ $f(x)$ критической точки называется *критическим значением.*

Теорема 3.2. *(А.Сард) Множество критических значений гладкого отображения имеет меру 0*

Согласно нашим определениям теорема Сарда эквивалентна следующему утверждению:

Теорема 3.3. *Рассмотрим открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^m$ и гладкое отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$. Тогда множество его критических значений имеет меру нуль.*

Доказательство будет вестись индукцией по m. При $n = m = 0$ утверждение очевидно. Будем считать, что $n, m > 0$. Рассмотрим множество критических точек $C \subset U \subset \mathbb{R}^m$ отображение $f(x) = (f^1(x), \dots f^n(x))$. Нам надо доказать, что множество $f(C) \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру 0.

Обозначим через C_k множество таких точек $x \in U$, где все частные производные функции f порядка $\leqslant i$ равны 0. Множества C_k образуют последовательность замкнутых множеств

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots.$$

Разобьем доказательство на 3 леммы

Лемма 3.1. *Образ $f(C \backslash C_1)$ имеет меру нуль.*

Лемма 3.2. *Образ $f(C_k \backslash C_{k+1})$ имеет меру нуль при $i \geqslant 1$.*

Лемма 3.3. *Существует k такое, что множество $f(C_k)$ имеет меру нуль.*

Proof. леммы 3.1. Для $n = 1$ лемма верна, поскольку в этом случае $C = C_1$. Пусть $n > 1$. Сначала для каждого $x_0 \in C \backslash C_1$ мы найдем такую открытую окрестность $x_0 \in V \subset \mathbb{R}^m$, что $f(V \cap C)$ имеет меру нуль.

Так как $x_0 \notin C_1$, то существует некоторая частная производная, например, $\partial f^1 / \partial x^1$, которая отлична от нуля в точке x_0. Рассмотрим отображение $h : U \to \mathbb{R}^m$, определенное формулой

$$h(x) = (f^1(x), x^2, ..., x^m).$$

Дифференциал dh_{x_0} невырожден, и, следовательно, h диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки x_0 на открытое множество $V' \subset \mathbb{R}^m$. Положим

$$g = f \circ h^{-1} : V' \to \mathbb{R}^n.$$

Рассмотри множество $C' \subset V'$ критических точек отображения g. Точка $x' \in C'$, если и только, если $h^{-1}(x') \in C$, то есть $x' \in h(C)$. Таким образом, $C' = h(V \cap C)$. Следовательно, $g(C') = f(V \cap C)$.

С другой стороны, для $x = (x^1, x^2, ..., x^m)$,

$$g(x^1, x^2, ..., x^m) = f \circ h^{-1}(x^1, x^2, ..., x^m) = f\Big((f^1)^{-1}(x), x^2, ..., x^m\Big) = (x^1, f^2(x), ..., f^m(x)).$$

Следовательно,

$$g(t, x^2, ..., x^m) = (t, g_t) \quad \text{где} \quad g_t : V' \bigcap \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^{n-1}.$$

Таким образом, матрица Якоби отображения $g(t, x^2, ..., x^m)$ представляется в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \{\partial g_t^i / \partial x^j\} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, точка $t \times \tilde{x} \in (t \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V'$ является критической точкой отображения g, если и только если $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{m-1}$ является критической точкой отображения g_t. Таким образом, мы представили множество $B = g(C') = f(V \cap C)$ критических значений функции g в виде $B = \bigcup\limits_t B_t$, где B_t — множество критических значений функции g_t.

Согласно предположению индукции $n-1$ мера множества B_t критических значений отображения g_t рана 0. Согласно хорошо известной теоремы теории меры отсюда следует, что n-мера самого множества критический значений $f(C \bigcap V)$ также равна 0. Нетрудно видеть, что множество $C \backslash C_1$ покрывается счетным числом окрестностей V такого типа и, следовательно, мера $f(C \backslash C_1)$ также равна 0. □

Proof. леммы 3.2. Доказательство этой леммы мало чем отличается от доказательства леммы 3.1. Для каждого $x_0 \in C_k \setminus C_{k+1}$ существует $(k+1)$-я производная $\partial^{k+1} f_r / \partial x_{s_1} ... \partial x_{s_{k+1}}$, отличная от нуля в точке x_0. Поэтому функция

$$w(x) = \partial^k f^r / \partial x^{s_2} ... \partial x^{s_{k+1}}$$

такая, что $w(x_0) = 0$, но $\partial w / \partial x^{s_1}(x_0) \neq 0$.

Предположим для определенности, что $s_1 = 1$. Тогда отображение $h : U \to R^m$, определенное по формуле

$$h(x) = (w(x), x^2, ..., x^m),$$

диффеоморфно отображает некоторую окрестность V точки x_0 на открытое множество V'. Рассмотрим

$$g = f \circ h^{-1} : V' \to R^n$$

и его ограничение

$$g_0 : (0 \times R^{m-1}) \cap V' \to R^n.$$

Функция ω равна 0 на C_k. Поэтому $h(C_k \cap V) \subset 0 \times R^{m-1}$ и

$$f(C_k \cap V) = gh(C_k \cap V) = g_0 h(C_k \cap V).$$

Все точки множества $h(C_k \cap V)$ являются критическими точками для g_0, поскольку в них все производные порядка $\leqslant k$ равны нулю. С другой стороны,множество всех критических значений отображения g_0 имеет меру нуль в R^n по предположению индукции. Следовательно,

$$\mu(f(C_k \cap V)) = \mu(g_0 h(C_k \cap V)) = 0.$$

Покрывая $C_k \backslash C_{k+i}$ счетным числом таких окрестностей V получаем утверждение леммы. □

Proof. леммы 3.3. Рассмотрим $k > \frac{m}{n} - 1$. Рассмотрим куб I с центром $x \in C_k$ и ребром δ. Используя теорему Тейлора, компактность куба I и определение C_k, мы, для достаточно малого δ, можем написать

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h),$$

где

$$\| R(x,h) \| \leqslant c \| h \|^{k+1} \quad \text{для всех} \quad x \in C_k \cap I, \quad x+h \in I. \tag{1}$$

Докажем, что мера множества $f(C_k \cap I)$ равна 0.

Теперь разделим I на r^m кубиков с ребром δ/r. Пусть I_x - содержащий точку $x \in C_k$ кубик этого разбиения. Тогда любая точка куба I_x может быть записана в виде

$$x + h \quad \text{где} \quad \| h \| \leqslant \sqrt{m}(\delta/r).$$

Из формулы (1) следует, что $f(I_x) \subset \mathbb{R}^n$ лежит в кубе с центром в точке $f(x)$ и ребром a/r^{k+1}, где $a = 2c(\sqrt{m}\ \delta)^{k+1}$.

Таким образом, объем множества $f(I_x)$ не превышает $a^n/r^{(k+1)n}$. Следовательно, $f(C^k \cap I)$ содержится в объединении самое большее r^m кубиков, имеющих общий объем

$$V \leqslant r^m a^n / r^{(k+1)n} = a^n r^{m-(k+1)n} = a^n r^{m-(\alpha+\frac{m}{n})n},$$

где $\alpha = k + 1 - \frac{m}{n} > 0$. Таким образом, объем $V \leq a^n r^{-\alpha n}$ и стремится к 0 при $r \to \infty$. Следовательно, множество $f(C_k \cap I)$ должно иметь меру нуль. Покрывая C_k счетным числом таких кубиков I находим, что мера множества $f(C_k)$ равно 0. $\square$

Вот первые следствия теоремы Сарда.

Следствие 3.1. *Если $F : M_1 \to M_2$ гладкое отображение и $\dim M_1 < \dim M_2$, то $M_2 \setminus F(M_1) \neq \emptyset$*

Задача 3.3. *Множество регулярных значений гладкого отображения $F : M_1 \to M_2$ открыто и всюду плотно в M_2.*

3.3. **Вложение многообразий в векторное пространство.** Рассмотрим гладкие многообразия M и N размерностей m и n. Гладкое отображение $f : M \to N$ называется *погружением*, если ранг отображения $df\ |_x$: $T_x \to T_{f(x)}$ при любом x равен m. Это означает, что линейное отображение $df\ |_x$ касательных пространств является мономорфизмом для всех $x \in M$. Отсюда следует, в частности, что $m \leq n$. Используя теорему об обратных отображениях находим, что в этом случае f устанавливает диффеоморфизм между некоторой окрестностью $U(x)$ точки $x \in M$ и ее образом $f(U(x))$ в многообразии N. Однако, "в целом" отображение f вовсе не обязано быть взаимно однозначным.

Погружение $f : M \to N$ будем называть *вложением*, если f устанавливает взаимно однозначное соответствие между M и $f(M)$.

Нам понадобиться следующая несложная задача, известная вам из курса анализа.

Задача 3.4. *Пусть $A \subset B \subset \mathbb{R}^m$ — гомеоморфные $\mathbb{R}^m$ открытые множества, такие, что замыкание $\bar{A}$ лежит в B. Тогда существует гладкая функция $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ такая что $f(A) = 1$ $0 < f(B \setminus A) < 1$ и $f(\mathbb{R}^m \setminus B) = 0$*

Теорема 3.4. *Любое компактное гладкое многообразие M может быть вложено в $\mathbb{R}^N$ для достаточно большого N.*

Proof. Рассмотрим конечный набор из k локальных карт $\{(U_i, \varphi_i = (\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^m)\}$ покрывающий многообразии M. Выберем карты так, чтобы образ $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m$ не содержали 0. Поскольку пересечения $U_i \cap U_j$ открыты, мы можем найти меньшие области $V_i \subset U_i$ такие, что $\bar{V}_i \subset U_i$ и $\bigcup\limits_i V_i = M$. Рассмотрим гладкую функцию $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, равную 1 на V_i и 0 вне U_i (см. задачу 3.4). Продолжим функции $\varphi_i^j|_{V_i}$ до гладких функций $\psi_i^j : M \to \mathbb{R}$, где $\psi_i^j(x) = f_i(x)\varphi_i^j(x)$ при $x \in U_i$ и $\psi_i^j(x) = 0$ при $x \in M \setminus U_i$.

Докажем теперь, что набор функций $\{\psi_i^j(1 = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m), f_i(1 = 1, \dots, k)\}$ задает вложение $F : M \to \mathbb{R}^{km+k}$. Пусть $x \in V_i$. Тогда ранг $\mathtt{rang}(dF_x)$ оператора dF_x не превышает $\dim M = m$. С другой стороны, функция ψ_i^j на U_i совпадает с частью координат функции F и поэтому $\mathtt{rang}(dF) \geq \mathtt{rang}(d\psi_i) = \mathtt{rang}(d\varphi_i) = m$. Таким образом, $\mathtt{rang}(dF) = m$ в каждой точке многообразия M, то есть F — погружение.

Докажем, что F переводит разные точки в разные точки. Пусть $x \neq y$ и $x \in V_i$. Тогда $f_i(x) = 1$. Если $f_i(y) \neq 1$, то $F(x) \neq F(y)$. Если $f_i(y) = 1$, то $y \in U_i$, причем $\psi_i(x) = \varphi_i(x) \neq \varphi_i(y) = \psi_i(y)$. Следовательно, $F(x) \neq F(y)$. □

Найдем теперь оценку для минимальной размерности векторного пространства, куда можно вложить гладкое многообразие размерности m.

Теорема 3.5. *(Уитни) Любое гладкое компактное m-мерное гладкое многообразие M можно гладко погрузить в $\mathbb{R}^{2m}$ и гладко вложить в $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

Proof. Рассмотрим любое гладкое вложение $\varphi : M \to R^N$, существующее согласно из теореме 3.4. Чтобы не загромождать обозначения мы будем обозначать образ $\varphi(M) \subset \mathbb{R}^N$ той же буквой M. Докажем, что при $N > 2m$ существует проекция $\pi : \mathbb{R}^N \to L$ на гиперплоскость $L \subset \mathbb{R}^N$ такая, что $\pi|_M$ — погружение.

Рассмотрим пучок прямых в $\mathbb{R}^N$, проходящих через 0. Эти прямые составляют проективное пространство $\mathbb{R}P^{N-1}$. Сопоставим каждой прямой $\ell \in \mathbb{R}P^{N-1}$ проходящую через 0 ортогональную ей гиперплоскость $\mathbb{R}_\ell^{N-1}$ и ортогональную проекцию $\pi_\ell : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_\ell^{N-1}$ на эту гиперплоскость. Пару (x, ℓ), где $x \in M$, $\ell \in \mathbb{R}P^{N-1}$ назовем *запрещенной*, если дифференциал $d\pi_\ell : T_x \to \mathbb{R}_\ell^{N-1}$ имеет ненулевое ядро. Обозначим через Q множество всех запрещенных пар.

Задача 3.5. *Докажите, что пара (x, ℓ) является запрещенной если только если касательная плоскость $T_x(M) \subset \mathbb{R}^N$ содержит прямую параллельную ℓ. Докажите, что Q является гладким многообразием размерности $2m - 1$.*

Построим отображение $\alpha : Q \to \mathbb{R}P^{N-1}$ положив $\alpha(x, \ell) = \ell$.

Задача 3.6. *Докажите, что отображение α гладкое.*

Образ $\alpha(Q)$ — это все направления $\ell \in \mathbb{R}P^{N-1}$, проектирование вдоль которых не дает погружения. Назовем их *запрещенным направлением первого типа.* Докажем теперь, что не все направления запрещенные.

Пусть $(x, \ell) \in Q$. Тогда размерность образа дифференциала $\mathtt{rang}(d\alpha_{(x,\ell)}) \leq \dim Q = 2m - 1$. Следовательно, если $2m - 1 < N - 1$, то $\mathtt{rang}(d\alpha_{(x,\ell)}) < \mathbb{R}P^{N-1}$ во всех точках Q. Таким образом, в этом случае все множество Q состоит из критических точек отображения α. Согласно теореме Сарда отсюда следует, что $\mu(\alpha(Q)) = 0$. В частности, $\mathbb{R}P^{N-1} \setminus \alpha(Q) \neq \emptyset$ и существует направление $\ell_0 \in \mathbb{R}P^{N-1}$ проектирование по которому является

погружением в пространство $\mathbb{R}^{N-1}$. Если $N-1>2m$, повторяя рассуждение находим проектирование на подпространство размерности $N-2$. Проделав такое проектирование достаточное число раз получаем погружение в пространство размерности $2m$.

Задача 3.7. *Какая особенность возникает при проектировании гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ на двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль запрещенного направления первого типа?*

Докажем, что при $N > 2m+1$ существует проекция $\pi : \mathbb{R}^N \to L$ на гиперплоскость $L \subset \mathbb{R}^N$ такая, что $\pi|_M$ — погружение. Направление $\ell \in \mathbb{R}P^{N-1}$ назовем *запрещенным направлением второго типа*, если существует $x \neq y \in M$ такие, что $\pi_\ell(x) = \pi_\ell(y)$. Множество запрещенных направлений второго типа является образом отображения $\beta : G \to \mathbb{R}P^{N-1}$, которое определено на множестве $G = \{(x,y) \in M \times M | x \neq y\}$ и сопоставляет паре $(x,y) \ni G$ проходящую через 0 прямую $\beta(x,y) \subset \mathbb{R}^N$, параллельную прямой проходящую через точки x, y.

Задача 3.8. *Докажите, что отображение β гладкое.*

Размерность многообразия G равна $2m$. Следовательно, при $2m < N-1$ все точки множества G являются критическими для отображения β. В этом случае, согласно теореме Сарда, множество $\beta(G)$ имеет меру 0 в $\mathbb{R}^{N-1}$.

Итак мы доказали, что множество $\mathbb{R}P^{N-1} \setminus (\alpha(Q) \cup \beta(Q))$ не пусто при $N-1 > 2m$. Проектирование в направлении прямой из этого множества дает вложение в пространство меньшей размерности. Проделав такое проектирование достаточное число раз получаем второе утверждение теоремы. □

Замечание 3.1. *Известна более сложная теорема (мы ее не доказываем), что любое n-мерное многообразие M можно гладко вложить $\mathbb{R}^{2n}$. В общем случае эта оценка уже неулучшаема.*

4. Векторные расслоения

4.1. **Определения и примеры.** Гладкое отображение гладких многообразий $\pi : E \to X$ называется *вещественным локально тривиальным векторным расслоением ранга r*, если

1) *слой* $E_p = \pi^{-1}(p)$ каждой точки $p \in X$ наделен структурой вещественного векторного пространства размерности r;

2) у каждой точки $p \in X$ существует окрестность $U \subset X$ и гладкое отображение $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$, называемое *локальной тривиализацией*, такие, что $h(E_x) = x \times \mathbb{R}^r$ и отображение $h|_{E_x} : E_x \to x \times \mathbb{R}^r$ является изоморфизмом векторных пространств для любого $x \in U$.

Многообразия E и X называются соответственно *пространством* и *базой* расслоения. Далее мы будем для краткость опускать слова "вещественное локально тривиальное".

Пара тривиализаций $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и $h_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^r$ порождает отображение $h_\alpha h_\beta^{-1} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \to (U_\alpha \bigcap U_\beta) \times \mathbb{R}^r$. Это отображение эквивалентное гладкому отображению $g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \to GL(r, \mathbb{R})$, и называется *функцией перехода*.

Лемма 4.1. *Пусть* $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \Upsilon\}$ *открытое покрытие гладкого многообразия* X. *Тогда семейство гладких отображений*

$$\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \to GL(r, \mathbb{R}) | \alpha, \beta \in \Upsilon\}$$

является семейством функцией перехода некоторого векторного расслоения $\pi : E \to X$, *если и только если*

$$g_{\alpha\alpha} = 1 \quad \text{и} \quad g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1 \quad \text{на} \quad U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma \quad \text{для любых} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon.$$

Proof. Равенство $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ для семейства функций перехода векторного расслоения очевидно. Докажем обратное утверждение. Рассмотрим семейство гладких отображений $\mathcal{G}$ такое, что $g_{\alpha\alpha} = 1$ и $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon$. Рассмотрим $\tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in \Upsilon} E_\alpha$, где $E_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. Точки $(p, v) \in E_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и $(p, w) \in E_\beta = U_\beta \times \mathbb{R}^r$ будем считать эквивалентными, если $v = g_{\alpha\beta} w$. Факторизация множества $\tilde{E}$ по этой эквивалентности порождает нужное нам расслоение с локальными тривиализациями $h_\alpha(p, v) = (p, v)$. □

Таким образом, мы можем задавать векторные расслоения над X, указывая покрытие многообразия X и семейство функций перехода, удовлетворяющее лемме 4.1.

Пример 4.1. *1) Тривиальное расслоение* $\pi : X \times \mathbb{R}^r \to X$.

2) Касательное расслоение $\pi : TX \to X$ *над произвольным гладким многообразием* X. *Рассмотрим атлас локальных карт* $\{(f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^r) | \alpha \in \Upsilon\}$ *многообразия* X. *Гомеоморфизм* f_α *позволяет выбрать базис* $\{\frac{\partial}{\partial x^i} | i = 1, \ldots, r\}$ *касательного пространства* T_x *в каждой точке* $x \in U_\alpha$. *Этот базис позволяет отождествить касательное пространство* T_x *с арифметическим* $\mathbb{R}^r$. *Объединение касательных пространств* $\pi^{-1}(U_\alpha) = \{T_x | x \in U_\alpha\}$ *отождествляется при этом с множеством* $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. *Таким образом, мы построили локальную цивилизацию* $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$.

Задача 4.1. *Докажите, что функция перехода* $g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \to GL(r, \mathbb{R})$ *между тривилизациями* h_α *и* h_β *касательного расслоения совпадает с матрицей Якоби отображения* $f_\alpha f_\beta^{-1} : f_\beta(U_\alpha \bigcap U_\alpha) \to f_\beta(U_\alpha \bigcap U_\beta)$.

Морфизмом векторного расслоения $\pi : E \to X$ в векторное расслоение $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{X}$ называется пара гладких отображений $\varphi_X : X \to \tilde{X}$ и $\varphi_E : E \to \tilde{E}$ таких, что $\tilde{\pi} \varphi_E = \varphi_X \pi$ и ограничение $\varphi_E|_p$ отображения φ_E на каждый слой $E|_p = \pi^{-1}(p)$ является гомоморфизмом. Как обычно, обратимый морфизм в классе морфизмов расслоений называется *изоморфизмом расслоений.*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_E} & \tilde{E} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} \\ X & \xrightarrow{\varphi_X} & \tilde{X} \end{array}$$

Особую роль играют морфизмы пучков с общей базой, то есть морфизмы, где $\widetilde{X} = X$ и φ_X — тождественное отображение. Множество таких морфизмов обозначается $Hom(E, \widetilde{E})$. Изоморфизм φ_E для таких расслоений называется *эквивалентностью расслоений.*

Задача 4.2. *Доказать, что семейства переходных функций* $\{g_{\alpha,\beta}\}$ *и* $\{\tilde{g}_{\alpha,\beta}\}$ *задают эквивалентные расслоения, если и только если существует семейство гладких отображений* $l_\alpha : U_\alpha \to GL(r,\mathbb{R})$ *такое, что* $\tilde{g}_{\alpha,\beta} = l_\alpha g_{\alpha,\beta} l_\beta^{-1}$.

Расслоение $\pi^* : E^* \to X$ называется *сопряженным* к расслоению $\pi : E \to X$, если слои E_p и E_p^*, а локальные тривиализации порождены локальными тривиализациями

$$(\pi)^{-1}(U) \to U \times (\mathbb{R}^r)$$

и имеют вид

$$(\pi^*)^{-1}(U) \to U \times (\mathbb{R}^r)^*.$$

Эта запись подразумевает, что слои тривиального расслоения $U \times (\mathbb{R}^r)^*$ интерпретируются как линейные функционалы на слоях пространства $\mathbb{R}^r$. Естественным базисом для $(\mathbb{R}^r)^*$ является семейство линейных функционалов $\{e^j\}$ таких, что $e^j(e_i) = \delta_i^j$.

Задача 4.3. *Докажите, что функция перехода* $(g^*)_l^k$ *к новой тривиализации для расслоения* π^* *обратна функции перехода* g_j^i *к новой тривиализации для расслоения* π. *То есть* $g_j^i (g^*)_l^j = \delta_l^i$.

Сечением векторного расслоения $\pi : E \to X$ на подмножестве $U \subset X$ называется гладкое отображение $s : U \to E$ такое что πs — тождественное отображение. Таким образом, сечение сопоставляет каждой точке $p \in U$ вектор из E_p. Сечения тривиального расслоения — это гладкие вектор-функции на X. Сечения произвольного расслоение — это важное обобщение гладких функций. В локальной тривиализации $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ сечение представляется зависящей от тривиализации гладкой вектор-функцией $\{s^i\}$ на U. При замене тривиализации она переходит в вектор-функцию $\{\tilde{s}^i = g_j^i s^j\}$, где g_j^i — это матричная функция перехода к новой тривиализации.

Множество сечений $\mathcal{F}_\pi(U)$ расслоения π над подмножеством $U \subset X$ образуют векторное пространство. Более того, мы можем поточечно умножить сечение на гладкую функцию, получая при этом сечение того же расслоения. Это задаёт на множестве сечений $\mathcal{F}_\pi(U)$ структуру модуля над алгеброй гладких функций на U.

Набор сечений $\{s_1, \ldots, s_r\} \subset \mathcal{F}_\pi(U)$ назовем набором *независимых* сечений, если вектора $\{s_1(p), \ldots, s_r(p)\}$ линейно независимы при каждом $p \in U$. В этом случае произвольное сечение имеет вид $f^i(p) s_i(p)$, где $\{f^i(p)\}$ — гладкие функции на U.е

Задача 4.4. *Докажите, что независимый набор сечений* $\{s_i\} \subset \mathcal{F}_\pi(U)$ *эквивалентен локальной тривиализации* $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$. *(Подсказка: в качестве набора независимых сечений надо взять сечения* $s_i(p) = p \times e_i$, *где* $\{e_i\}$ — *стандартный базис пространства* $\mathbb{R}^r$.*) Докажите, что замена тривиализаций с функцией перехода* $\{g_i^j\}$ *эквивалентна замене набора независимых сечений* $\tilde{e}_j = g_j^i e_i$.

4.2. **Классификационная теорема.** *Грассмановым многообразием* $\mathbb{K}G_{r,n}$ *над полем* $\mathbb{K}$ называется множество всех r-мерных подпространств векторного пространства $\mathbb{K}^n$. Мы будем рассматривать лишь вещественные ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) и комплексные ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) грассмановы многообразия.

Универсальным расслоением называется расслоение $\pi_{r,n} : F \to \mathbb{K}G_{r,n}$ ранга r, слой которого F_p над точкой $p \in \mathbb{K}G_{r,n}$ совпадает с подпространством в $\mathbb{K}^n$, представляющим p.

Структура гладкого (соответственно, комплексного) многообразия определяется на $\mathbb{K}G_{r,n}$ и F следующим образом. Рассмотрим множество $M_{r,n}$ всех матриц $r \times n$ ранга r с элементами из $\mathbb{K}$. Строчки матрицы $m \in M_{r,n}$ будем интерпретировать как векторы пространства $\mathbb{K}^n$. Они образуют базис подпространства $[m] \in \mathbb{K}^n$. Группа $GL(r, \mathbb{K})$ действует на $M_{r,n}$ умножением слева, переводя строчки матрицы $M_{r,n}$ в их линейные комбинации и тем самым меняя базис пространства $[m]$. Это позволяет отождествить подпространство $[m] \in \mathbb{K}G_{r,n}$ с орбитой матрицы m под действием группы $GL(r, \mathbb{K})$. Множество $\mathbb{K}G_{r,n}$ является, таким образом, фактор-пространством $M_{r,n}/GL(r, \mathbb{K})$. Гладкая или, комплексная структура на $M_{r,n}$ определяет соответствующую структуру на фактор-пространстве $\mathbb{K}G_{r,n}$.

Построим теперь атлас многообразия, аналогичный атласу для проективного пространства. Матрице $m \in M_{r,n}$ и набору чисел $\alpha = \{1 \leq \alpha_1 < \alpha_2, ..., < \alpha_r \leq n\}$ отвечает $r \times r$ матрица $m_\alpha \in GL(r, \mathbb{K})$, составленная из столбцов α. Обозначим через F_α множество всех матриц $m \in M_{r,n}$ таких, что матрица m_α невырождена. Орбиты $[m]$ матриц $m \in F_\alpha$ образуют открытое множество $[F_\alpha] = \bigcup\limits_{m \in F_\alpha} [m] \subset \mathbb{K}G_{r,n}$. Совокупность всех таких множеств является покрытием многообразия $\mathbb{K}G_{r,n}$.

Сопоставим матрице $m \in F_\alpha$ матрицу $m_{\bar{\alpha}} \in M_{r,n-r}$, получающуюся из матрицы $m_\alpha^{-1} m$ выкидыванием столбцов α. Зададим теперь функцию $f_\alpha : [F_\alpha] \to \mathbb{K}^{r \times (n-r)}$ равенством $f_\alpha([m]) = m_{\bar{\alpha}}$. Пары $([F_\alpha], f_\alpha)$ образуют гладкий атлас многообразия $\mathbb{K}G_{r,n}$.

Задача 4.5. *Найти функции перехода между картами атласа.*

Рассмотрим $m \in F_\alpha$. Векторное пространство $\pi_{r,n}^{-1}([m])$ порождено строками матрицы $m_\alpha^{-1} m$. Сопоставив этим строкам стандартный базис пространства $\mathbb{K}^r$, получаем изоморфизм векторных пространств $\pi_{r,n}^{-1}([m]) \to \mathbb{K}^r$. Совокупность этих изоморфизмов порождает локальную тривиализацию $h_\alpha : \pi_{r,n}^{-1}([F_\alpha]) \to [F_\alpha] \times \mathbb{K}^r$.

Задача 4.6. *Найти функции перехода между этими тривиализациями.*

Рассмотрим векторное расслоение $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{X}$ и гладкое отображение $\varphi_X : X \to \tilde{X}$. *Обратным образом расслоения* $\tilde{\pi}$ при отображении φ_X называется векторное расслоение $\pi : E \to X$, порождающее вместе с некоторым отображением $\varphi_E : E \to \tilde{E}$ морфизм расслоений (φ_X, φ_E)

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_E} & \tilde{E} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} \\ X & \xrightarrow{\varphi_X} & \tilde{X} \end{array}$$

такой что ограничение $\varphi_E|_{\pi^{-1}(p)}$ является изоморфизмом векторных пространств для любого $p \in X$.

Лемма 4.2. *Для любого гладкого отображения $\varphi_X : X \to \tilde{X}$ существует обратный образ произвольного векторного расслоения $\pi : \tilde{E} \to \tilde{X}$.*

Proof. Для $p \in X$ положим $E_p = E_{\varphi(p)}$. Положим $E = \bigcup\limits_p E_p$. Определим $\pi : E \to X$ и $\varphi_E : E \to \tilde{E}$ через естественные соответствия $\pi(E_p) = p$ и $\varphi_E|_p : E_p \to \tilde{E}_{\varphi(p)}$. Тогда $\tilde{\pi}\varphi_E = \varphi_X \pi$.

Рассмотрим локальную тривиализацию $\tilde{h} : \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{U}) \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^r$ расслоения $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{X}$. Её полный прообраз имеет вид $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$, где $U = \varphi^{-1}(\tilde{U})$. Гладкая структура на U и $\mathbb{R}^r$ наделяет $\pi^{-1}(U)$ гладкой структурой при которой h — гладкое отображение. Гладкие переходные функции между локальными тривиализациями расслоения $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{X}$ склеивают гладкие структуры на $\pi^{-1}(U)$ в гладкую структуру на E. При этом отображения π и φ_E превращаются в гладкие отображения, а отображения $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ порождают локальные тривиализации. $\square$

Задача 4.7. *Доказать, что обратный образ расслоения определен однозначно, с точностью до эквивалентности.*

Термин "универсальное расслоение" объясняется следующим фактом

Теорема 4.1. *Всякое векторное расслоение $\pi : E \to X$ ранга r над компактным гладким многообразием X изоморфно обратному образу некоторого универсального расслоения $\pi_{r,N} : F \to \mathbb{R}G_{r,N}$ для некоторого гладкого отображения $\Phi : X \to \mathbb{R}G_{r,N}$.*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_E} & F \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{r,N}} \\ X & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}G_{r,N} \end{array}$$

Proof. Обозначим через $l_1, ..., l_r$ стандартный базис сопряженного пространства $(\mathbb{R}^r)^*$, где $l_i(x^1, ..., x^r) = x^i$. Покроем X конечной системой тривиализаций $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ расслоения $\pi : E \to X$. Функционалы $l_1, ..., l_r$ порождают сечения $l_1^\alpha, ..., l_r^\alpha$ над U_α сопряженного расслоения $\pi^* : E^* \to X$. Впишем замкнутое покрытие $\{V_\alpha\}$ в открытое покрытие $\{U_\alpha\}$. Рассмотрим ограничения $\hat{l}_1^\alpha, ..., \hat{l}_r^\alpha$ сечений $l_1^\alpha, ..., l_r^\alpha$ на элементы покрытия $\{V_\alpha\}$. Используя доказанную на первом курсе теорему, продолжим сечения $\hat{l}_1^\alpha, ..., \hat{l}_r^\alpha$ до глобальных сечений $\tilde{l}_1^\alpha, ..., \tilde{l}_r^\alpha$ расслоения $\pi^* : E^* \to X$ таких, что $\tilde{l}_r^\alpha = 0$ вне U_α. Проделав эту процедуру для всех элементов покрытия $\{V_\alpha\}$ находим набор глобальных сечений $(\tilde{l}_1, ..., \tilde{l}_N) = \bigcup\limits_\alpha (\tilde{l}_1^\alpha, ..., \tilde{l}_r^\alpha)$ расслоения $\pi^* : E^* \to X$, имеющий ранг r в любой точке $p \in X$.

Сопоставим теперь базису $e_1, ..., e_r$ в слое $E_p = \pi^{-1}(p)$ матрицу $W_p = \{w_{ij}\}$, где $w_{ij} = \tilde{l}_j(e_i)$. Обозначим через $\hat{W}_p \subset \mathbb{R}^N$ векторное пространство,порожденное строками этой матрицы. Обозначим через $[W_p] = \pi_{r,N}(\hat{W}_p)$ отвечающую подпространству $\hat{W}_p$ точку грассманиана $\mathbb{R}G_{r,N}$ и положим $\Phi(p) = [W_p]$. Отображение φ_E, сопоставляющее базису $e_1, ..., e_r$ строки матрицы W_p, порождает изоморфизм между расслоением $\pi : E \to X$ и обратным образом универсального расслоения $\pi_{r,N} : F \to \mathbb{R}G_{r,N}$ при отображении $\Phi : X \to \mathbb{R}G_{r,N}$. Отметим, что отображения φ_E и Φ не зависят от выбора базиса $e_1, ..., e_r$. $\square$

Замечание 4.1. *Можно доказать, что всякое векторное расслоение с не обязательно компактной базой может быть покрыто конечной системой тривиализаций. Таким образом, теорема 4.1 верна для произвольного гладкого, не обязательно компактного многообразия.*

4.3. **Тензорные произведения расслоений.** На векторные расслоения $\pi : E \to X$ с общей базой X переносится значительная часть теории конечномерных векторных пространств и, в частности, операции между расслоениями

$$\pi_k : E_k \to X, \quad (k = 1, \dots, n)$$

и их сечениями $\mathcal{F}_{\pi_k}(X)$.

Определим сначала тензорное произведение

$$\pi = \pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_n : E \to X,$$

расслоений π_k. Слоями расслоения π являются тензорные произведения $E_p = (E_1)_p \otimes \dots \otimes (E_n)_p$ слоев расслоений π_k.

Переходя к более мелкому разбиению тривиализаций, можно считать, что локальные тривиализации всех расслоений π_k определены над одними и теми же областями U_α. Гладкие отображения перехода $\tilde{e}^k_{\tilde{i}} = (g_k)^i_{\tilde{i}} e_i$ для локальных тривиализаций расслоений π_k порождают гладкие отображения перехода

$$\tilde{e}^1_{\tilde{i}_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^n_{\tilde{i}_n} = (g_1)^{i_1}_{\tilde{i}_1} \dots (g_n)^{i_n}_{\tilde{i}_n} e^1_{i_1} \otimes \dots \otimes e^n_{i_n}. \tag{2}$$

между множествами $U_\alpha \times \mathbb{R}$.

Задача 4.8. *Докажите прямым вычислением, что отображения перехода* $g^{i_1 \dots i_n}_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_n} = (g^1)^{i_1}_{\tilde{i}_1} \dots (g^n)^{i_n}_{\tilde{i}_n}$ *удовлетворяют условиям леммы 4.2*

Используя лемму 4.2, определим теперь тензорное произведение расслоений как расслоение с переходными отображениями $g^{i_1 \dots i_n}_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_n} = (g^1)^{i_1}_{\tilde{i}_1} \dots (g^n)^{i_n}_{\tilde{i}_n}$.

Задача 4.9. *Докажите, что* $(\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_n)^* = \pi_1^* \otimes \dots \otimes \pi_n^*$.

Эта конструкция позволяет определить также тензорное умножение произвольных сечений формулой

$$a^{i_1}_1 e^1_{i_1} \otimes \dots \otimes a^{i_n}_n e^n_{i_n} = a^{i_1}_1 \dots a^{i_n}_n e^1_{i_1} \otimes \dots \otimes e^n_{i_n} \in \mathcal{F}_\pi(X).$$

Задача 4.10. *Докажите, что умножение сечений не зависит от выбора тривиализации и, следовательно, порождает гомоморфизм векторных пространств* $\mathcal{F}_{\pi_1}(X) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{\pi_n}(X) \to \mathcal{F}_\pi(X)$.

Задача 4.11. *Определите прямые суммы расслоений и исследуйте их свойства.*

Особый интерес представляют тензорные степени расслоений $\pi^{\otimes n} = \pi \otimes \dots \otimes \pi$ и пространств их сечений $\mathcal{F}^{\otimes n}_\pi(X)$. В этом случае $\pi^{\otimes n_1} \otimes \pi^{\otimes n_2} = \pi^{\otimes (n_1+n_2)}$ и

$$\mathcal{F}^{\otimes n_1}_\pi(X) \otimes \mathcal{F}^{\otimes n_2}_\pi(X) \to \mathcal{F}^{\otimes (n_1+n_2)}_\pi(X).$$

Задача 4.12. *Докажите, что операции* $\oplus$ *и* $\otimes$ *наделяют множество* $\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^{\otimes n}_\pi(X)$ *структурой градуированной алгебры над кольцом гладких функций.*

4.4. **Внешние степени расслоений.** Напомним определение внешней степени векторного пространства. Обозначим через S_n группу перестановок чисел $\{1,\dots,n\}$ и через $|\sigma|$ четность перестановки $\sigma \in S_n$. Рассмотрим векторное пространство V размерности r. Базис $\{e_i\}$ пространства V порождает базис $\{e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_n}\}$ векторного пространства $V^{\otimes n}$. Положим

$$e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n} = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{|\sigma|}e_{i_{\sigma(1)}}\otimes\dots\otimes e_{i_{\sigma(n)}}.$$

Тогда

$$e_{i_{\chi(1)}}\wedge\dots\wedge e_{i_{\chi(n)}} = (-1)^{|\chi|}e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n}.$$

при любом $\chi\in S_n$. В частности, $e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n}=0$, если среди векторов $e_{i_1},\dots,e_{i_n}$ есть совпадающие.

Задача 4.13. *Докажите, что векторы*

$$e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n}\subset V^{\otimes n}\quad (i_1<\dots<i_n)$$

линейно независимы.

Обозначим через $V^{\wedge n}\subset\mathbb{R}^r$ векторное пространство, порожденное векторами $e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n}\subset V^{\otimes n}\quad (i_1<\dots<i_n)$. Его размерность $d=\dim V^{\wedge n}$ равна 0 при $n>r$ и $d=\frac{r!}{n!(r-n)!}$ при $n\le r$.

Теорема 4.2. *Замена базиса $\tilde e_{\tilde i}=g^i_{\tilde i}e_i$ приводит к замене базиса*

$$\tilde e_{\tilde i_1}\wedge\dots\wedge\tilde e_{\tilde i_n}=\hat g^{i_1\dots i_n}_{\tilde i_1\dots\tilde i_n}e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_n}\quad (i_1<\dots<i_n;\ \tilde i_1<\dots<\tilde i_n),$$

где $\hat g^{i_1\dots i_n}_{\tilde i_1\dots\tilde i_n}=\sum\limits_{\chi\in S_n}(-1)^{|\chi|}g^{i_1}_{\tilde i_{\chi(1)}}\dots g^{i_n}_{\tilde i_{\chi(n)}}$.

Proof. Пусть $\tilde i_1<\dots<\tilde i_n$. Согласно нашим определениям

$$\tilde e_{\tilde i_1}\wedge\dots\wedge\tilde e_{\tilde i_n}=\sum_{\chi\in S_n}(-1)^{|\chi|}\tilde e_{\tilde i_{\chi(1)}}\otimes\dots\otimes\tilde e_{\tilde i_{\chi(n)}}=\sum_{\chi\in S_n}(-1)^{|\chi|}g^{i_1}_{\tilde i_{\chi(1)}}\dots g^{i_n}_{\tilde i_{\chi(n)}}e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_n}.$$

Пусть $i_s=i_t$ при $s\ne t$. Докажем, что тогда $\tilde e_{\tilde i_1}\wedge\dots\wedge\tilde e_{\tilde i_n}=0$. Для этого рассмотрим перестановку $\rho\in S_n$, переставляющую s и t и тождественную на остальных числах. Тогда

$$\sum_{\chi\in S_n}(-1)^{|\chi|}g^{i_1}_{\tilde i_{\chi(1)}}\dots g^{i_n}_{\tilde i_{\chi(n)}}e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_n}=\sum_{\chi\in S_n}(-1)^{|\chi|}g^{i_1}_{\tilde i_{\chi\rho(1)}}\dots g^{i_n}_{\tilde i_{\chi\rho(n)}}e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_n}=$$

$$\sum_{\chi\in S_n}(-1)^{|\chi|+|\rho|}g^{i_1}_{\tilde i_{\chi(1)}}\dots g^{i_n}_{\tilde i_{\chi(n)}}e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_n}=-\sum_{\chi\in S_n}(-1)^{|\chi|}g^{i_1}_{\tilde i_{\chi(1)}}\dots g^{i_n}_{\tilde i_{\chi(n)}}e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_n}.$$

Таким образом, значение суммы

$$\sum_{\chi\in S_n}(-1)^{|\chi|}g_{\tilde i_{\chi(1)}}\dots g^{i_n}_{\tilde i_{\chi(n)}}e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_n}$$

не изменится, если мы будем считать, что все индексы $\{i_k\}$ в мономах

$$(-1)^{|\chi|}g^{i_1}_{\tilde i_{\chi(1)}}\dots g^{i_n}_{\tilde i_{\chi(n)}}e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_n}$$

попарно различны.

Выделим подмножество подмножества $I = \{i_1 < \cdots < i_n\} \subset \{1, \ldots, r\}$ и рассмотрим подсумму мономов с индексами из I

$$S_I = \sum_{\chi \in S_n} (-1)^{|\chi|} \sum_{\sigma \in S_n} g^{i_{\sigma(1)}}_{\tilde{i}_{\chi(1)}} \ldots g^{i_{\sigma(n)}}_{\tilde{i}_{\chi(n)}} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(n)}} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \Big(\sum_{\chi \in S_n} (-1)^{|\chi|} g^{i_{\sigma(1)}}_{\tilde{i}_{\chi(1)}} \ldots g^{i_{\sigma(n)}}_{\tilde{i}_{\chi(n)}} \Big) e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(n)}}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{\chi \in S_n} (-1)^{|\chi|} g^{i_{\sigma(1)}}_{\tilde{i}_{\chi(1)}} \ldots g^{i_{\sigma(n)}}_{\tilde{i}_{\chi(n)}} = \sum_{\chi \in S_n} (-1)^{|\chi|} g^{i_1}_{\tilde{i}_{\chi\sigma^{-1}(1)}} \ldots g^{i_n}_{\tilde{i}_{\chi\sigma^{-1}(n)}} =$$

$$(-1)^{|\sigma|} \sum_{\chi \in S_n} (-1)^{|\chi|} g^{i_1}_{\tilde{i}_{\chi(1)}} \ldots g^{i_n}_{\tilde{i}_{\chi(n)}}.$$

Таким образом,

$$S_I = \sum_{\sigma \in S_n} \Big(\sum_{\chi \in S_n} (-1)^{|\chi|} g^{i_{\sigma(1)}}_{\tilde{i}_{\chi(1)}} \ldots g^{i_{\sigma(n)}}_{\tilde{i}_{\chi(n)}} \Big) e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(n)}} =$$

$$\sum_{\chi \in S_n} (-1)^{|\chi|} g^{i_1}_{\tilde{i}_{\chi(1)}} \ldots g^{i_n}_{\tilde{i}_{\chi(n)}} \Big(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(n)}} \Big) =$$

$$\sum_{\chi \in S_n} (-1)^{|\chi|} g^{i_1}_{\tilde{i}_{\chi(1)}} \ldots g^{i_n}_{\tilde{i}_{\chi(n)}} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}.$$

□

Следствие 4.1. *Подпространство $V^{\wedge n} \subset V^{\otimes n}$ не зависит от выбора базиса $\{e_i\}$ в векторном пространстве V.*

Задача 4.14. *Докажите, что пространство $(V^{\wedge n})^*$ естественно изоморфно пространству кососимметрических полилинейных форм на V. Докажите, что $(V^{\wedge n})^* = (V^*)^{\wedge n}$.*

Соответствие $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \mapsto e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ порождает гомоморфизм векторных пространств $\varphi_\wedge : V^{\otimes n} \to V^{\wedge n}$. Положим $[v] = \varphi_\wedge(v)$. Определим *внешнее произведение* элементов $e^1 \in V^{\wedge n_1}, e^2 \in V^{\wedge n_2}$ формулой

$$e^1 \wedge e^2 = \frac{1}{n_1! n_2!} [e^1 \otimes e^2].$$

Задача 4.15. *Докажите, что гомоморфизм $\varphi_\wedge$ и внешнее произведение $e^1 \wedge e^2$ не зависит от выбора базиса $\{e_i\}$ в пространстве V. Докажите градуированную коммутативность $e^1 \wedge e^2 = (-1)^{n_1 n_2} e^2 \wedge e^1$ и ассоциативность $(e^1 \wedge e^2) \wedge e^3 = e^1 \wedge (e^2 \wedge e^3)$ внешнего произведения.*

Подрасслоением расслоения $\pi : E \to X$ называется гладкое подмногообразие $\hat{E} \subset E$ такое, что ограничение $\hat{\pi} = \pi|_{\hat{E}} : \hat{E} \to X$ является расслоением, причем любая тривиализация

$$h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$$

порождает тривиализацию

$$\hat{h} : \hat{\pi}^{-1}(U) \to U \times V,$$

где $\hat{\pi}^{-1}(U) = \pi^{-1}(U) \cap \hat{E}$ и $V \subset \mathbb{R}^r$ — векторное подпространство.

Построим теперь внешнюю степень

$$\pi^{\wedge n} : E^{\wedge n} \to X$$

расслоения $\pi : E \to X$ как подрасслоение его тензорной степени $\pi^{\otimes n} : E^{\otimes n} \to X$.

Слоями расслоения $\pi^{\wedge n} : E^{\wedge n} \to X$ являются векторные пространства $(E^{\wedge n})_p = (E_p)^{\wedge n}$. Гладкую структуру на $E^{\wedge n} = \bigcup\limits_{p \in X} (E_p)^{\wedge n}$ можно ввести по той же схеме, как и в случае тензорного произведения.

Согласно теореме 4.2 переходные функции

$$\tilde{e}_{\tilde{i}_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{\tilde{i}_n} = \hat{g}^{i_1 \dots i_n}_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$$

тривиализаций расслоения $\pi^{\wedge n}$ выражаются через переходные функции $\tilde{e}_{\tilde{i}} = g^i_{\tilde{i}} e_i$ тривиализаций расслоения π по формулам

$$\hat{g}^{i_1 \dots i_n}_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_n} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} g^{i_1}_{\tilde{i}_{\sigma(1)}} \dots g^{i_n}_{\tilde{i}_{\sigma(n)}}.$$

Задача 4.16. *Докажите, что матричнозначные функции $\hat{g}^{i_1 \dots i_n}_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_n}$ удовлетворяют условиям леммы 4.2.*

Таким образом, согласно лемме 4.2 мы можем определить внешнее произведение расслоений, считая, что переходные отображения между локальными тривиализациями внешнего произведения равны

$$\hat{g}^{i_1 \dots i_n}_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_n} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} g^{i_1}_{\tilde{i}_{\sigma(1)}} \dots g^{i_n}_{\tilde{i}_{\sigma(n)}}.$$

Задача 4.15 позволяет ввести между сечениями $e^i \in \mathcal{F}_{\pi^{\wedge n_i}}(X); (i = 1, 2)$ внешнее произведение $e^1 \wedge e^2 \in \mathcal{F}_{\pi^{\wedge (n_1 + n_2)}}(X)$ со свойством $e^1 \wedge e^2 = (-1)^{n_1 n_2} e^2 \wedge e^1$.

5. Формула Стокса

5.1. **Дифференциальные формы.** Рассмотрим касательное расслоение $\pi : TX \to X$ гладкого многообразия X размерности r. Двойственное к нему расслоение $\pi^* : T^*X \to X$ называется *кокасательным расслоением.*

Локальная карта $\varphi : U \to \mathbb{R}^r = \{(x^1, \dots, x^r)\}$ многообразия X порождает набор независимых сечений $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ касательного расслоения π (см. раздел 2.3) и двойственный к нему набор независимых сечений кокасательного расслоения, который обозначается $\{dx^i\}$. Эти наборы независимых сечений порождают локальные тривиализации, которые мы и будем всегда рассматривать, говоря о касательных и кокасательных расслоениях.

Специфика расслоений, порожденных касательными и кокасательными расслоениями, состоит в том, что функции перехода между картами гладкого атласа многообразия порождают функции перехода между порожденными ими тривиализациями.

Рассмотрим другую локальную карту $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^r = \{(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^r)\}$. Функции перехода между локальными картами удобно записывать в виде

$$\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1, \dots, x^r); \quad x^j = x^j(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^r).$$

Локальные карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^r$ и $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^r$ порождают разные локальные тривиализации касательного и кокасательного расслоений.

Задача 5.1. *Докажите, что функции перехода между этими тривиализациями определяются соответствиями между наборами независимых сечений, где эти соответствия имеют вид*

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\frac{\partial}{\partial x^i}; \quad \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$$

и

$$dx^j = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} d\tilde{x}^i; \quad d\tilde{x}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} dx^i.$$

В теории гладких многообразий особую роль играют внешние степени кокасательных расслоений $(\pi^*)^{\wedge n}$. Их сечения называются *дифференциальными формами степени* n или *дифференциальными* n*-формами.* Таким образом, в локальных тривиализациях, порожденных локальными картами, дифференциальные формы степени n имеют вид

$$T_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}, \quad \text{где} \quad i_1 < \dots < i_n.$$

Гладкие функции на X удобно считать дифференциальными формами степени 0. Дифференциальные формы степени n образуют модуль $\mathcal{E}^n(X) = \mathcal{F}_{(\pi^*)^{\wedge n}}(X)$ над кольцом гладких функций $\mathcal{F}(X) = \mathcal{E}^0(X)$. В частности, тогда $\mathcal{E}^n(X) = \emptyset$ при $n > r$ и $\dim \mathcal{E}^r(X) = 1$.

Кроме того, теорема 4.13 влечет

Следствие 5.1. *Дифференциальные формы*

$$T_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}, \quad \text{где} \quad i_1 < \dots < i_n$$

и

$$\tilde{T}_{i_1 \dots i_n} d\tilde{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^{i_n}, \quad \text{где} \quad i_1 < \dots < i_n$$

в локальных картах $\{x^i\}$ *и* $\{\tilde{x}^i\}$ *с переходными функциями* $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1, \dots, x^r)$ *совпадают, если и только если*

$$\tilde{T}_{\tilde{i}_1 \dots \tilde{i}_n} = \sum_{\chi \in S_n} (-1)^{|\chi|} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}_{\chi(1)}}} \dots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial \tilde{x}^{\tilde{i}_{\chi(n)}}} T_{i_1 \dots i_n}.$$

В частности,

$$x^1 \wedge \dots \wedge x^r = \det\{\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\} d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge \tilde{x}^r.$$

Между дифференциальными формами существует линейный оператор d, повышающий их степень на 1. Мы будем определять его в локальной тривиализации, порожденной произвольной локальной картой.

Для гладкой функции $f \in \mathcal{E}^0$ положим

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \in \mathcal{E}^1.$$

При замене локальной карты с функцией перехода $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1, \dots, x^r)$ дифференциальная форма $\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ переходит в дифференциальную форму

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} d\tilde{x}^j\Big) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\Big) d\tilde{x}^j = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j} d\tilde{x}^j.$$

Таким образом, дифференциальная форма df не зависит от выбора локальной карты.

Определим теперь оператор $d : \mathcal{E}^n \to \mathcal{E}^{n+1}$, считая, что

$$d(T_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) = d(T_{i_1 \dots i_n}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}.$$

Задача 5.2. *Доказать, что* $d^2 = 0$. *Пусть* $\omega_1 \in \mathcal{E}^{n_1}$ *и* $\omega_2 \in \mathcal{E}^{n_2}$. *Докажите, что* $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{n_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$.

5.2. **Интегрирование дифференциальных форм.** Гладкий атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Sigma\}$ гладкого многообразия M *назовем ориентирующим*, если положительны все определители якобианов переходных функций. Многообразие, допускающее ориентирующий атлас, назовем *ориентируемым*.

Два ориентирующих атласа назовем эквивалентными если их объединение также является ориентирующим атласом. Класс эквивалентности ориентирующих атласов называется *ориентацией многообразия*.

Задача 5.3. *Докажите, что всякое ориентируемое многообразие имеет ровно 2 ориентации.*

Гладкое многообразие с выбранной ориентацией называется *ориентированным*. Карту ориентированного многообразия назовем *допустимой*, если ее можно включить в ориентирующий атлас задающий ориентацию многообразия.

Рассмотрим гладкую дифференциальную форму $\omega \in \mathcal{E}^r(U)$ на связной односвязной области $U \subset M$ ориентированного гладкого многообразия M размерности r. Пусть (U, φ) — допустимая карта. В этой карте дифференциальная форма имеет вид $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r$, где f — гладкая функция. Определим интеграл от ω равенством

$$\int\limits_U \omega = \int\limits_U f dx^1 \dots dx^r.$$

Докажем, что это определение не зависит от отображения φ.

Действительно, рассмотрим другую допустимую карту $(U, \tilde{\varphi})$ с функцией перехода $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^1, \dots, x^r)$. В этой карте, согласно следствию 5.1, форма имеет вид

$$\omega = f(\det\{\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\} d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^r).$$

Таким образом, наше определение, примененное к карте $(U, \tilde{\varphi})$, дает

$$\int\limits_U \omega = \int\limits_U f \det\{\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\} d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^r$$

.

С другой стороны, согласно формуле замены переменных в интеграле многомерного анализа,

$$\int\limits_U f dx^1 \dots dx^r = \int\limits_U f \Big| \det\{\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\} \Big| d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^r = \int\limits_U f \det\{\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\} d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^r.$$

Распространим теперь определение интеграла на компактные ориентированные многообразия. Рассмотрим ориентирующий конечный атлас $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Sigma\}$ ориентированного многообразия M.

Набор гладких функций $\{\psi_\alpha | \alpha \in \Sigma\}$ на M называется *разбиением единицы, подчиненным атласу* $\mathcal{U}$, если $\mathtt{supp}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha$, $0 \leq \psi_\alpha \leq 1$ и $\sum\limits_{\alpha \in \Sigma} \psi_\alpha(x) = 1$. (Как обычно, через $\mathtt{supp}(f)$ обозначается носитель функции f, то есть замыкание $\overline{\{x \in U_\alpha | f(x) \neq 0\}}$.)

Задача 5.4. *Докажите, что разбиение единицы существует. (С доказательства аналогичного утверждения для произвольных расслоений начинается доказательство теоремы 4.1).*

Определим интеграл по всему многообразию M как

$$\int\limits_M \omega = \sum_{\alpha \in \Sigma} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega.$$

Лемма 5.1. *Определение не зависит от разбиения единицы* $\{\psi_\alpha | \alpha \in \Sigma\}$, *подчиненного атласу* $\mathcal{U}$.

Proof. Обозначим через N мощность $|\Sigma|$ множества Σ. Пусть $\{\psi^1_\alpha | \alpha \in \Sigma\}$ и $\{\psi^2_\alpha | \alpha \in \Sigma\}$ — разбиения единицы, подчиненные атласу $\mathcal{U}$. Положим $\psi_\alpha = \psi^1_\alpha - \psi^2_\alpha$. Нам достаточно доказать, что

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega = 0$$

для функций ψ_α таких, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha = 0$ и $\mathtt{supp}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha$. Это утверждение мы будем доказывать индукцией по N. Для $N = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение доказано для множеств Σ мощности меньшей N.

Рассмотрим функцию

$$\psi_N = -\sum_{\alpha=1}^{N-1} \psi_\alpha$$

и построим гладкую функцию χ такую, что $\chi(\mathtt{supp}(\psi_N)) = 1$ и $\mathtt{supp}(\chi) \subset U_N$. Тогда $\chi\psi_N = \psi_N$ и

$$\psi_N = -\sum_{\alpha=1}^{N-1} \chi\psi_\alpha; \quad \mathtt{supp}(\chi\psi_\alpha) \subset U_N \cap U_\alpha.$$

С другой стороны,

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega = \int\limits_{U_N} \psi_N \omega + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega = -\sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_N} \chi\psi_\alpha \omega + \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_\alpha} (\psi_\alpha - \chi\psi_\alpha)\omega.$$

Применим теперь предположение индукции к набору функций $\tilde{\psi}_\alpha = \psi_\alpha - \chi\psi_\alpha$ где $\alpha = 1, \dots, N-1$. Это можно сделать, поскольку

$$\sum_{\alpha=1}^{N-1} \tilde{\psi}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \psi_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{N-1} \chi\psi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \psi_\alpha + \chi\psi_N = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \psi_\alpha + \psi_N = 0.$$

Таким образом,

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \int\limits_{U_\alpha} (\psi_\alpha - \chi\psi_\alpha)\omega = 0.$$

□

Теорема 5.1. *Определение интеграла на ориентированном гладком многообразии не зависит от выбора ориентирующего атласа.*

Proof. Рассмотрим 2 ориентирующих атласа $\mathcal{U}^1 = \{(U^1_{\alpha^1}, \varphi^1_{\alpha^1}) | \alpha^1 \in \Sigma^1\}$ и $\mathcal{U}^2 = \{(U^2_{\alpha^2}, \varphi^2_{\alpha^2}) | \alpha^2 \in \Sigma^2\}$ на ориентированном многообразии M. Их объединение $\mathcal{U} = \mathcal{U}^1 \cup \mathcal{U}^2$ тоже является ориентирующим атласом.

Рассмотрим согласованное с атласом $\mathcal{U}^1$ разбиение единицы ψ^1_α и продолжим его до разбиения единицы согласованного с атласом $\mathcal{U}$, считая, что функции, отвечающие картам атласа, $\mathcal{U}^2$ нулевые. Построенное разбиение единицы, подчиненное атласу $\mathcal{U}$, дает то же значение интеграла, что и разбиение единицы, подчиненное атласу $\mathcal{U}^1$. Таким образом, согласно лемме 5.1 интеграл, построенный по атласу $\mathcal{U}^1$ совпадает с интегралом, построенным по атласу $\mathcal{U}$.

Аналогично доказывается, что интеграл, построенный по атласу $\mathcal{U}^2$, совпадает с интегралом построенным по атласу $\mathcal{U}$. □

5.3. **Общая формула Стокса.** *Топологическим многообразием с краем* называется хаусдорфово топологическое пространство P со счетной базой такое, что для всякой его точки существует окрестность, гомеоморфная или пространству $\mathbb{R}^r$ (такие точки называются *внутренними*), или полупространству $\mathbb{R}^r_+ = \{x \in \mathbb{R}^k | x^r \geq 0\}$ (такие точки называются *граничными*). Множество граничных точек обозначается ∂P.

Внутренней картой многообразия с краем P называется пара (U, φ), где $U \subset P \setminus \partial P$ — открытое подмножество и $\varphi : U \to \mathbb{R}^r$ — гомеоморфизм на подмножество $\varphi(U)$.

Граничной картой многообразия с краем P называется пара (U, φ), где $U \cap \partial P \neq \emptyset$, $U \setminus \partial P$ открытое подмножество $P \setminus \partial P$ и $\varphi : U \to \mathbb{R}^r_+$ — гомеоморфизм на подмножество $\varphi(U)$ такой, что $\varphi(U \cap \partial P)$ — открытое подмножество $\mathbb{R}^r_0 = \{x \in \mathbb{R}^k | x^r = 0\}$.

Совокупность покрывающих P внутренних и граничных карт называется *гладким атласом*, если все отображения перехода гладкие. Гладкость отображений перехода в окрестности внутренней точки определяется также как и для многообразий без границы.

Для того, чтобы определить гладкие отображения перехода в окрестности граничной точки надо указать, какие отображения $f : X \to Y$ областей с границей $X, Y \subset \mathbb{R}^r_+$ мы считаем диффеоморфизмами. По определению — это тоже гомеоморфизмы, у которых существуют частные производные всех порядков. В

этом определении производные $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ определяются стандартным образом для $i < r$, а производная $\frac{\partial f}{\partial x^r}$ на границе считается односторонней. То есть

$$\frac{\partial f}{\partial x^r}(x^1, \dots, x^{r-1}, 0) = \lim_{x^r \to +0} \frac{f(x^1, \dots, x^{r-1}, x^r) - f(x^1, \dots, x^{r-1}, 0)}{x^r}.$$

Гладкие атласы называются эквивалентными, если их объединение тоже гладкий атлас. Класс эквивалентности гладких атласов называется гладкой структурой, а многообразие с гладкой структурой называется гладким многообразием с границей (краем). На гладкие многообразия с границей без затруднений переносятся определения векторных расслоений, дифференциальных форм и все, что с ними связано.

Из наших определений сразу следует, что ограничение гладкого атласа $\mathcal{U}$ многообразия P на его границу ∂P образует гладкий атлас $\partial\mathcal{U}$ на ∂P, превращая границу ∂P в гладкое многообразие размерности $r-1$.

Ориентации и ориентирующие атласы на многообразиях с краем определяются дословно также как для гладких многообразий без границы. Из наших определений сразу следует, знак определителя якобиана функции перехода атласа $\mathcal{U}$ в граничной точке совпадает со знаком определителя якобиана индуцированной функции перехода для атласа $\partial\mathcal{U}$ в этой точке. Поэтому ограничение ориентирующего атласа многообразия P на границу ∂P также является ориентирующим атласом. Возникшая ориентация многообразия ∂P называется *индуцированной*. Говоря об ориентированном многообразии с границей, мы всегда будем подразумевать, что его граница наделена индуцированной ориентацией.

Теорема 5.2. *(Общая формула Стокса) Рассмотрим дифференциальную форму ω степени $r-1$ на гладком ориентированном многообразии P размерности r с границей. Тогда*

$$\int\limits_P d\omega = (-1)^r \int\limits_{\partial P} \omega.$$

Proof. Левая и правая части формулы Стокса линейны относительно формы χ. Определение интеграла

$$\int\limits_P \omega = \sum_{\alpha \in \Sigma} \int\limits_{U_\alpha} \psi_\alpha \omega$$

сводит доказательство к случаю, когда носитель формы ω принадлежит одной карте. Более того, в этом случае теорему достаточно доказать для каждой из форм вида

$$\omega_k = f(x^1, \dots, x^r) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \dots \wedge dx^r.$$

Пусть $k < r$. Тогда ограничение формы ω_k на ∂P равно 0, поскольку x^r, а значит и dx^r равны 0 на ∂P . Таким образом, правая часть формулы Стокса равна 0.

Найдем ее левую часть.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^r_+} d\omega_k = \int\limits_{\mathbb{R}^r_+} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \dots \wedge dx^r = (-1)^{k-1} \int\limits_{\mathbb{R}^r_+} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r.$$

С другой стороны, интегрируя функцию $\frac{\partial f}{\partial x^k}$ по переменной x^k находим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k = f(x^1, \dots, x^r)\Big|_{x^k=-\infty}^{x^k=+\infty} = 0,$$

поскольку носитель формы ω_k лежит внутри области U_α. Теперь, переходя к повторному интегралу сначала по x^k, а потом по остальным переменным, находим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^r_+} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r = 0.$$

Осталось разобрать случай $\omega = f(x^1, \dots, x^r) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{r-1}$. В этом случае

$$\int\limits_{\partial P} \omega = \int\limits_{\mathbb{R}^{r-1}} f(x^1, \dots, x^{r-1}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{r-1}.$$

С другой стороны,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{r-1}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^r_+} d\omega = (-1)^{r-1} \int\limits_{\mathbb{R}^r_+} \frac{\partial f}{\partial x^r} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r.$$

Интегрируя функцию $\frac{\partial f}{\partial x^r}$ по переменной x^r, находим, что

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x^r} dx^r = f(x^1, \dots, x^r)\Big|_{x^r=0}^{x^r=+\infty} = -f(x^1 \dots, x^{r-1}, 0).$$

Переходя к повторному интегралу, находим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^r_+} d\omega = (-1)^r \int\limits_{\mathbb{R}^{r-1}} f(x^1, \dots, x^{r-1}, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{r-1} = (-1)^r \int\limits_{\partial P} \omega.$$

□

5.4. **Маломерные редукции общей формулы Стокса.** Посмотрим, что означает общая формула Стокса в простейших ситуациях, когда $P \subset \mathbb{R}^n$ и $n = 1, 2, 3$. Эти формулы появились в математическом анализе значительно раньше общей формулы Стокса и позволили ее найти.

Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть $n = 1$. Тогда P — это отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, ориентированный по возрастанию чисел. Граница состоит из точек a, b. Их ориентацией точки назовем знак, который мы ей присваиваем. Этот знак положительный, если направление от точки границы во внутрь отрезка совпадает с ориентацией отрезка, и отрицательный в противном случае. Таким образом, a — положительная точка, а b — отрицательная.

Дифференциальная форма ω степени 0 — это гладкая функция f. Таким образом, общая формула Стокса при $n = 1$ принимает вид

$$\int\limits_a^b df = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx = (-1)(f(a) - f(b)) = f(b) - f(a),$$

то есть формулы Ньютона-Лейбница.

Формула Грина.

Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная гладкой кривой компактная область на плоскости и $\omega = A(x^1, x^2)dx^1 + B(x^1, x^2)dx^2$ — гладкая дифференциальная форма степени 1. Стандартная ориентация плоскости $\mathbb{R}^2$ порождает ориентацию области P. Кроме того,

$$d\omega = \Big(\frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{\partial A}{\partial x^2}\Big) dx^1 \wedge dx^2.$$

Применяя общую формулу Стокса, находим, что

$$\int\limits_{\partial P} \Big(A dx^1 + B dx^2\Big) = \int\limits_P \Big(\frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{\partial A}{\partial x^2}\Big) dx^1 \wedge dx^2.$$

Эта формула называется формулой Грина.

Формула Гаусса-Остроградского.

Пусть $P \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная гладкой поверхностью компактная область в пространстве и $\omega = A(x^1, x^2, x^3)dx^1 \wedge dx^2 + B(x^1, x^2, x^3)dx^2 \wedge dx^3 + C(x^1, x^2, x^3)dx^3 \wedge dx^1$ — гладкая дифференциальная форма степени 2. Стандартная ориентация пространства $\mathbb{R}^3$ порождает ориентацию области P. Кроме того,

$$d\omega = \Big(\frac{\partial A}{\partial x^3} + \frac{\partial B}{\partial x^1} + \frac{\partial C}{\partial x^2}\Big) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Применяя общую формулу Стокса, находим, что

$$\int\limits_{\partial P} \Big(A dx^1 \wedge dx^2 + B dx^2 \wedge dx^3 + C dx^3 \wedge dx^1\Big) =$$

$$- \int\limits_P \Big(\frac{\partial A}{\partial x^3} + \frac{\partial B}{\partial x^1} + \frac{\partial C}{\partial x^2}\Big) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Эта формула называется формулой Гаусса-Остроградского.

Классическая формула Стокса.

Пусть $P \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная гладкой кривой гладкая компактная поверхность в пространстве и $\omega = A(x^1, x^2, x^3)dx^1 + B(x^1, x^2, x^3)dx^2 + C(x^1, x^2, x^3)dx^3$ — гладкая дифференциальная форма степени 1. Стандартная ориентация пространства $\mathbb{R}^3$ порождает ориентацию поверхности P. Кроме того

$$d\omega = \Big(\frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{\partial A}{\partial x^2}\Big) dx^1 \wedge dx^2 + \Big(\frac{\partial C}{\partial x^2} - \frac{\partial B}{\partial x^3}\Big) dx^2 \wedge dx^3 + \Big(\frac{\partial A}{\partial x^3} - \frac{\partial C}{\partial x^1}\Big) dx^3 \wedge dx^1.$$

Применяя общую формулу Стокса, находим, что

$$\int\limits_{\partial P} \Big(A dx^1 + B dx^2 + C dx^3\Big) =$$

$$\int\limits_P \Big(\frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{\partial A}{\partial x^2}\Big) dx^1 \wedge dx^2 + \Big(\frac{\partial C}{\partial x^2} - \frac{\partial B}{\partial x^3}\Big) dx^2 \wedge dx^3 + \Big(\frac{\partial A}{\partial x^3} - \frac{\partial C}{\partial x^1}\Big) dx^3 \wedge dx^1.$$

Именно эту формулу и нашел в середине 19 века известный английский физик и математик Стокс.

6. Когомологии де Рама

6.1. **Когомологии и гомологии.** Исследуем более подробно оператор дифференцирования дифференциальных форм $d : \mathcal{E}^n(M) \to \mathcal{E}^{n+1}(M)$ на многообразии M. Напомним, что в локальной карте линейный оператор d определяется условием

$$d(T_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) = d(T_{i_1 \dots i_n}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}.$$

Дифференцируя функцию f, находим

$$d^2 f = d(\frac{\partial f}{dx^i} dx^i) = d(\frac{\partial f}{dx^i}) dx^i = \frac{\partial^2 f}{dx^i dx^j} dx^j \wedge dx^i = 0,$$

откуда (задача 5.2)

$$d^2(T_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) = d^2(T_{i_1 \dots i_n}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = 0.$$

Формы, принадлежащие ядру этого оператора d, называются *замкнутыми формами* или *коциклами*. Они образуют вещественное векторное пространство $Z^n(M)\mathcal{E}^n(M)$. Формы, принадлежащие образу оператора d, называются *замкнутыми формами* или *кограницами*. Они образуют вещественное векторное пространство $B^n(M) \subset \mathcal{E}^n(M)$. Дифференциальные формы, отличающиеся на кограницу, называются *когомологичными*.

Мы доказали, что $B^n(M) \subset Z^n(M)$. Факторпространство

$$H^n(M, \mathbb{R}) = Z^n(M)/B^n(M)$$

называется *пространством n-мерных когомологий де Рама.*

Задача 6.1. *Докажите, что $H^n(M, \mathbb{R}) = 0$, если $n > \dim M$*

Из определения очевидно, что размерности этих пространств (они называются *n-мерными числами Бетти*) одинаковы у диффеоморфных многообразий. Другими словами, числа Бетти являются инвариантами гладких многообразий. (Можно доказать, что они одинаковы и у гомеоморфных многообразий, то есть являются топологическими инвариантами. Более того, они конечны для компактных многообразий.)

Лемма 6.1. *0-мерное число Бетти гладкого многообразия M равно числу связных компонент многообразия.*

Proof. Пространство $Z^0(M)$ состоит из локально постоянных функций, а пространство $B^0(M)$ пусто по определению. □

Задача 6.2. *Найдите когомологии точки p. Докажите, что $H^0(p, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ и $H^n(p, \mathbb{R}) = 0$, при $n > 0$.*

Прямая сумма

$$H^*(M,\mathbb{R}) = \bigoplus_{n\geq 0} H^n(M,\mathbb{R})$$

называется *полным пространством когомологий.*

Теорема 6.1. *Умножение дифференциальных форм задает на $H^*(M,\mathbb{R})$ структуру градуированной алгебры $H^{n_1}(M,\mathbb{R}) \wedge H^{n_2}(M,\mathbb{R}) \subset H^{n_1+n_2}(M,\mathbb{R})$, причем $a\wedge b = (-1)^{n_1 n_2} b\wedge a$ при $a\in H^{n_1}(M,\mathbb{R})$, $b\in H^{n_2}(M,\mathbb{R})$.*

Proof. Докажем, что умножение дифференциальных форм порождает умножение на полном пространстве гомологий. Пусть $a\in Z^{n_1}(M)$, $\tilde{a}\in \mathcal{E}^{n_1-1}(M)$, $b\in Z^{n_2}(M)$, $\tilde{b}\in \mathcal{E}^{n_2-1}(M)$. Тогда $da = db = 0$ и

$$(a+d\tilde{a})\wedge(b+d\tilde{b}) = a\wedge b + a\wedge d\tilde{b} + d\tilde{a}\wedge b + d\tilde{a}\wedge d\tilde{b} = a\wedge b + dc,$$

где

$$c = (-1)^{n_1} a\wedge\tilde{b} + \tilde{a}\wedge b + \tilde{a}\wedge d\tilde{b}.$$

Соотношение $a\wedge b = (-1)^{n_1 n_2} b\wedge a$ следует из соответствующего соотношения для дифференциальных форм (задача 4.15). □

Можно доказать что когомологии де Рама гладкого многообразия зависят лишь от его топологии. Приведем чисто топологическую конструкцию, приводящую к тем же группам. Стандартным *n-мерным симплексом* называется

$$\Delta_n = \{(x^0,x^1,\ldots,x^n)\in\mathbb{R}^{n+1} | x^0,\ldots,x^n > 0; x^0+,\ldots,+x^n = 1\}.$$

Мы будем рассматривать симплекс как выпуклую оболочку упорядоченного набора точек $p_i\in\mathbb{R}^{n+1} (i=0,\ldots,n)$ с координатами $p_i^k = \delta_i^k$. Любое подмножество множества $\{p_0,\ldots,p_n\}$ естественно упорядочено и поэтому образует стандартный симплекс меньшей размерности. Обозначим через $\Delta_{n,k}$ стандартный $n-1$-мерный симплекс, получающийся из симплекса Δ_n выкидыванием точки p_k.

Рассмотрим теперь топологическое пространство M. *n-мерным сингулярным симплексом* называется пара (Δ_n, f), где $f:\Delta_n\to M$ — непрерывное отображение. Линейная комбинация с вещественными коэффициентами n-мерных сингулярных симплексов называется *сингулярной цепью.* Обозначим через $C_n(M)$ векторное пространство всех сингулярных цепей.

Центральную роль в теории гомологий играет линейный оператор

$$\delta_n : C_n(M)\to C_{n-1}(M),$$

определенный на сингулярных симплексах равенством

$$\delta(\Delta_n, f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\Delta_{n,k}, f\big|_{\Delta_{n,k}}).$$

Он также называется *дифференцированием*, поскольку выполняется

Задача 6.3. *Доказать, что $\delta_{n-1}\delta_n = 0$.*

Сингулярные цепи из ядра $Z_n^{sing}(M) = \mathtt{Ker}(\delta_n)$ называются циклами, а из образа $B_n^{sing}(M) = \mathtt{Im}(\delta_{n+1})$ — границами. Векторное пространство

$$H_n^{sing}(M) = Z_n^{sing}(M)/B_n^{sing}(M)$$

называется пространством *n-мерных сингулярных гомологий.* Сопряженное к нему пространство $H^n_{sing}(M)$ называется пространством *n-мерных сингулярных когомологий.*

Можно доказать, что для гладких многообразий M сингулярные когомологии естественно изоморфны когомологиям де Рама. Этот изоморфизм порождается некоторым гомоморфизмом $\Phi : \mathcal{E}^n(M) \to C^*_n(M)$. Для его построения надо сначала доказать, что при определении сингулярных цепей можно ограничиться сингулярными симплексами (Δ_n, f) с гладкими отображениями f. Построим теперь линейный функционал $\{\Phi_\omega : C_n(M) \to \mathbb{R}\} \in C^*_n(M)$, отвечающий дифференциальной форме $\omega \in \mathcal{E}^n(M)$. На сингулярной цепи $c = \sum_\alpha \lambda_\alpha(\Delta_n, f_\alpha) \in C_n(M)$ он определяется как

$$\Phi_\omega(c) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \int\limits_{f_\alpha(\Delta_n)} \omega.$$

Трудная теорема де Рама утверждает, что гомоморфизм Φ порождает изоморфизм когомологий де Рама и сингулярных когомологий.

Гомологии и когомологии двойственны друг другу и, поэтому, казалось бы совершенно равноценны. Однако, операция произведения когомологий, естественная для когомологии де Рама на языке гомологий описывается достаточно сложно. Поэтому когомологии удобней использовать в приложениях.

6.2. **Гомотопическая инвариантность когомологий де Рама.** Два гладких отображения гладких многообразий $f_0 : M \to N$ и $f_1 : M \to N$ называются *гладко гомотопными*, если существует гладкое отображение $F : M \times [0,1] \to N$ (называемое гомотопией) такое, что $F(x,0) = f_0$ и $F(x,1) = f_1$.

В этом разделе мы докажем, что когомологии де Рама гладко гомотопных многообразий естественно изоморфны. Для этого изучим сначала как связаны между собой дифференциальные формы на многообразии M и части многообразия $M \times [0,1] \subset M \times (-\infty, +\infty)$.

Замечание 6.1. *Если подмножество S гладкого многообразия открыто, то гладкие сечения на нем (и, в частности дифференциальные формы) определяются, как и раньше как сечения, ограничения которых на принадлежащие S локальные карты гладкие. Такое определение не годится, однако, если не все точки S имеют окрестность, содержащуюся в S. В этом случае сечение ω считается гладким, если оно является ограничением на S гладкого сечения $\tilde{\omega}$ на некоторой открытой области, $\tilde{S} \supset S$.*

Задача 6.4. *Докажите что каждая форма*

$$\Omega \in \mathcal{E}^n(M \times [0,1])$$

разлагается в сумму

$$\Omega = \omega_{n-1} \wedge dt + \omega_n,$$

где $\omega_{n-1} \in \mathcal{E}^{n-1}(M)$ и $\omega_n \in \mathcal{E}^n(M)$. В локальной карте они имеют вид

$$\omega_{n-1} = a_{i_1 \dots i_{n-1}}(x,t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}}; \quad \omega_n = b_{i_1 \dots i_n}(x,t) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}.$$

(здесь и в дальнейшем суммирование происходит по индексам $i_1 < \dots < i_n$.)

Положим

$$D\Omega = D(\omega_{n-1} \wedge dt) = \int\limits_0^1 \omega_{n-1} dt = \Big(\int\limits_0^1 a_{i_1 \dots i_{n-1}}(x,t) dt \Big) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}}.$$

Задача 6.5. *Докажите, что соответствие $\Omega \mapsto D\Omega$ порождает гомоморфизм векторных пространств $D : \mathcal{E}^n(M \times [0,1]) \to \mathcal{E}^{n-1}(M)$.*

Лемма 6.2. *Пусть $\Omega \in \mathcal{E}^n(M \times [0,1])$. Тогда $Dd\Omega - dD\Omega = (-1)^n \Big(\Omega\Big|_{(x,1)} - \Omega\Big|_{(x,0)} \Big)$.*

Proof. Рассмотрим разложение $\Omega = \omega_{n-1} \wedge dt + \omega_n$. Согласно нашим определениям

$$dD\Omega = \Big(\int\limits_0^1 \frac{\partial a_{i_1 \dots i_{n-1}}(x,t)}{\partial x^i} dt \Big) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}}.$$

С другой стороны,

$$D(d\omega_{n-1} \wedge dt) = D\Big(\frac{\partial a_{i_1 \dots i_{n-1}}(x,t)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}} \wedge dt \Big) =$$

$$\Big(\int\limits_0^1 \frac{\partial a_{i_1 \dots i_{n-1}}(x,t)}{\partial x^i} dt \Big) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n-1}}.$$

Следовательно, $D(d\omega_{n-1} \wedge dt) = dD\Omega$.

Таким образом,

$$Dd\Omega - dD\Omega = Dd(\omega_{n-1} \wedge dt + \omega_n) - dD\Omega = D(d\omega_{n-1} \wedge dt + d\omega_n) - dD\Omega =$$

$$D(d\omega_{n-1} \wedge dt) + (d\omega_n) - dD\Omega = Dd\omega_n = D\Big(\frac{\partial b_{i_1 \dots i_n}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \Big) +$$

$$D\Big(\frac{\partial b_{i_1 \dots i_n}}{\partial t} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \Big) =$$

$$(-1)^n D\Big(\frac{\partial b_{i_1 \dots i_n}}{\partial t} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \wedge dt \Big) = (-1)^n \Big(\int\limits_0^1 \frac{\partial b_{i_1 \dots i_n}}{\partial t}(x,t) dt \Big) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} =$$

$$(-1)^n \Big(b_{i_1 \dots i_n}(x,1) - b_{i_1 \dots i_n}(x,0) \Big) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} = (-1)^n \Big(\omega_n\Big|_{(x,1)} - \omega_n\Big|_{(x,0)} \Big).$$

Кроме того, ограничение формы $\omega_{n-1} \wedge dt$ на плоскость (x,c) равно 0 для любой константы $c \in \mathbb{R}$ и, следовательно,

$$(-1)^n \Big(\omega_n\Big|_{(x,1)} - \omega_n\Big|_{(x,0)} \Big) = (-1)^n \Big(\Omega\Big|_{(x,1)} - \Omega\Big|_{(x,0)} \Big).$$

□

Гладкое отображение $f : M \to N$ порождает отображение кокасательных пространств $f^* : T^*N \to T^*M$, а значит и отображение дифференциальных форм $f^* : \mathcal{E}^n N \to \mathcal{E}^n M$.

Лемма 6.3. $df^* = f^* d$.

Proof. Утверждение описывает локальные свойства, поэтому его достаточно доказать для случая малых областей $M \subset \mathbb{R}^m = \{x\}$ и $N \subset \mathbb{R}^n = \{y\}$. В координатной форме отображение имеет вид $y^j = f^j(x)\,(j = 1, \dots, n)$. Тогда $f^*(dy^s) = \frac{\partial f^s}{\partial x^i} dx^i$. Следовательно,

$$d(f^*(dy^s)) = d(\frac{\partial f^s}{\partial x^i} dx^i) = \frac{\partial^2 f^s}{\partial x^t \partial x^i} dx^t \wedge dx^i = 0.$$

Аналогично

$$d(f^*(dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k})) = 0.$$

Следовательно,

$$d(f^*(a_{s_1 \dots s_k}(y) dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k})) = d(a_{s_1 \dots s_k}(y(x)) \wedge f^*(dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k})).$$

С другой стороны,

$$d(a_{s_1 \dots s_k}(y) dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k}) = da_{s_1 \dots s_k}(y) \wedge dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k}.$$

Поэтому

$$f^*(d(a_{s_1 \dots s_k}(y) dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k})) = f^*(da_{s_1 \dots s_k}(y)) \wedge f^*(dy^{s_1} \wedge \dots \wedge dy^{s_k}).$$

Таким образом, утверждение леммы достаточно проверить для функций $a : N \to \mathbb{R}$. В этом случае $f^*(a)(x) = a(y(x))$. Поэтому

$$d(f^*(a)) = d(a(y(x))) = \frac{\partial a}{\partial y^j} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} dx^i.$$

С другой стороны,

$$f^*(da) = f^*(\frac{\partial a}{\partial y^j} dy^j) = \frac{\partial a}{\partial y^j} f^*(dy^j) = \frac{\partial a}{\partial y^j} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} dx^i.$$

□

В виду перестановочности с оператором дифференцирования, отображение f^* переводит замкнутые формы в замкнутые, а точные формы в точные. Следовательно, оно порождает отображение когомологий де Рама $f^* : H^*(N, \mathbb{R}) \to H^*(M, \mathbb{R})$.

Задача 6.6. *Докажите, что это отображение является гомоморфизмом градуированных колец когомологий.*

Теорема 6.2. *Пусть гладкие отображения $f_0 : M \to N$ и $f_1 : M \to N$ гладко гомотопны. Тогда порожденные ими отображения колец гомологий $f_0^* : H^*(N, \mathbb{R}) \to H^*(M, \mathbb{R})$ и $f_1^* : H^*(N, \mathbb{R}) \to H^*(M, \mathbb{R})$ совпадают.*

Proof. Пусть $F : M \times [0, 1] \to N$ — гомотопия между отображениями f_0 и f_1. Рассмотрим дифференциальную форму $\omega \in \mathcal{E}^n N$ и положим $\Omega = F^*\omega$. Тогда $f_i^*(\omega) = \Omega\Big|_{(x,i)}$ и, согласно лемме 6.2,

$$f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega) = \left(\Omega\Big|_{(x,1)} - \Omega\Big|_{(x,0)}\right) = (-1)^n (Dd\Omega - dD\Omega) = (-1)^n (Dd(F^*\omega) - dD(F^*\omega)).$$

Гомологии определяются замкнутыми формами. Если ω — замкнутая форма, то $dF^*(\omega) = F^*d(\omega) = 0$ и значит

$$f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega) = (-1)^{n+1} dD(F^*\omega).$$

Таким образом, $f_1^*(\omega)$ и $f_0^*(\omega)$ отличаются на точную форму и, следовательно, представляют один и тот же класс когомологий. $\square$

(Гладкие) многообразия M и N называются (гладко) *гомотопически эквивалентными*, если существуют (гладкие) отображения $f : M \to N$ и $g : N \to M$ такие, что отображения $gf : M \to M$ и $fg : N \to N$ гомотопны тождественным отображениям $1_M : M \to M$ и $1_N : N \to N$

Задача 6.7. *Докажите, что векторное пространство $\mathbb{R}^k$ и диск $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k | |x| < 1\}$ гладко гомотопически эквивалентны точке.*

Следствие 6.1. *Гомотопически эквивалентные многообразия имеют изоморфные группы когомологий.*

Proof. Рассмотрим отображения $f : M \to N$ и $g : N \to M$ реализующие гомотопическую эквивалентность многообразий M и N. Рассмотрим порожденные ими гомоморфизмы колец $f^* : H^*(N, \mathbb{R}) \to H^*(M, \mathbb{R})$ и $g^* : H^*(M, \mathbb{R}) \to H^*(N, \mathbb{R})$.

Согласно теореме 6.2, отображения $g^*f^* = (fg)^* = (1_M)^*$ и $f^*g^* = (gf)^* = (1_N)^*$ являются тождественными отображениями на себя колец $H^*(M, \mathbb{R})$ и $H^*(N, \mathbb{R})$. Таким образом, отображения g^* и f^* взаимно обратны и реализуют изоморфизм между кольцами $H^*(N, \mathbb{R})$ и $H^*(N, \mathbb{R})$. $\square$

Следствие 6.2. *(лемма Пуанкаре). Все замкнутые дифференциальные формы на диске D^k точны.*

Proof. Сопоставляя следствие 6.1 и задачи 6.2 6.7, находим, что $H^n(D^k, \mathbb{R}) = 0$ при $n > 0$. $\square$

6.3. **Точные последовательности.** Нам понадобится алгебраическая лемма, связанная с точными последовательностями. Этот раздел математики называется "гомологическая алгебра".

Говорят, что последовательность гомоморфизмов векторных пространств

$$A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{l} C$$

точна в члене B, если $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(h)$. Последовательность гомоморфизмов,

$$\dots \to D_i \to D_{i+1} \to D_{i+2} \to \dots,$$

точная в каждом члене, называется *точной*.

Теорема 6.3. *Рассмотрим коммутативную диаграмму* $(*)$ *гомоморфизмов векторных пространств*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{A}^0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "h_0"] & \mathcal{A}^1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "h_1"] & \dots\mathcal{A}^n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "h_n"] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "l"] & \mathcal{B}^0 \arrow[r, "\beta_0"] \arrow[d, "l_0"] & \mathcal{B}^1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "l_1"] & \dots\mathcal{B}^n \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[d, "l_n"] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & \mathcal{C}^0 \arrow[r, "\gamma_0"] \arrow[d] & \mathcal{C}^1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d] & \dots\mathcal{C}^n \arrow[r, "\gamma_n"] \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

все столбцы которой, начиная со второго, точны, а строки удовлетворяют условиям

$$\alpha_0\alpha = \alpha_{i+1}\alpha_i = \beta_0\beta = \beta_{i+1}\beta_i = \gamma_0\gamma = \gamma_{i+1}\gamma_i = 0.$$

Тогда диаграмма $(*)$ *порождает точную последовательность векторных пространств* $(**)$

$$0 \to H^0(\mathcal{A}) \xrightarrow{\tilde{h}_0} H^0(\mathcal{B}) \xrightarrow{\tilde{l}_0} H^0(\mathcal{C}) \xrightarrow{\tilde{\delta}_0} H^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\tilde{h}_1} H^1(\mathcal{B}) \xrightarrow{\tilde{l}_1} H^1(\mathcal{C}) \xrightarrow{\tilde{\delta}_1} H^2(\mathcal{A})...,$$

где

$$H^0(\mathcal{A}) = \mathtt{Ker}(\alpha_0), \quad H^n(\mathcal{A}) = \mathtt{Ker}(\alpha_n)/\mathtt{Im}(\alpha_{n-1})$$
$$H^0(\mathcal{B}) = \mathtt{Ker}(\beta_0), \quad H^n(\mathcal{B}) = \mathtt{Ker}(\beta_n)/\mathtt{Im}(\beta_{n-1})$$
$$H^0(\mathcal{C}) = \mathtt{Ker}(\gamma_0), \quad H^n(\mathcal{C}) = \mathtt{Ker}(\gamma_n)/\mathtt{Im}(\gamma_{n-1}).$$

Proof. Рассмотрим $c \in \mathrm{Ker}(\gamma_n)$. Ввиду точности столбца существует элемент $b \in \mathcal{B}^n$ такой, что $l_n(b) = c$. Положим $b' = \beta_n b$. Тогда, в виду коммутативности диаграммы, $l_{n+1}b' = l_{n+1}(\beta_n b) = \gamma_n(l_n b) = \gamma_n(c) = 0$. Ввиду точности столбца существует элемент $a \in \mathcal{A}^{n+1}$ такой, что $h_{n+1}(a) = b'$. Более того, в виду коммутативности диаграммы, $h_{n+2}(\alpha_{n+1}a) = \beta_{n+1}(h_{n+1}a) = \beta_{n+1}b' = \beta_{n+1}\beta_n b = 0$. Ввиду точности столбца отсюда следует, что $\tilde{\alpha}_{n+1}a = 0$, то есть $a \in \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_{n+1})$.

Таким образом, мы сопоставили элементу $c \in \mathrm{Ker}(\gamma_n)$ некоторый элемент $a \in \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_{n+1})$. Наша конструкция, однако, не однозначна, поскольку элемент $b \in \mathcal{B}^n$ со свойством $l_n(b) = c$ не единственный. Любой другой элемент с этим свойством отличается от выбранного нами элемента b на элемент $b_0 \in \mathcal{B}^n$ со свойством $l_n(b_0) = 0$. Согласно нашей конструкции, замена b на $b + b_0$ меняет a на $a + a_1$, где $a_1 = h_{n+1}^{-1}\beta_n b_0$. С другой стороны, ввиду точности столбца, $b_0 = h_n a_0$, где $a_0 \in \mathcal{A}^n$. Таким образом, в виду коммутативности диаграммы, $a_1 = h_{n+1}^{-1}\beta_n h_n a_0 = \alpha_n a_0 \in \mathtt{Im}(\alpha_n)$. Следовательно, a и $a + a_1$ представляют один и тот же элемент в $H^{n+1}(\mathcal{A})$. То есть построенное соответствие $c \mapsto a$ дает гомоморфизм $\tilde{\delta}_n : \mathrm{Ker}(\gamma_n) \to H^{n+1}(\mathcal{A})$.

Пусть теперь $\tilde{c} \in \mathrm{Im}(\gamma_{n-1})$, то есть $\tilde{c} = \gamma_{n-1}c'$ для некоторого $c' \in \mathcal{C}^{n-1}$. Ввиду точности столбца, существует элемент $b' \in \mathcal{B}^{n-1}$ такой, что $l_{n-1}(b') = c'$. Положим $b'_0 = \beta_{n-1}b'$. Ввиду коммутативности диаграммы $l_n b'_0 = \tilde{c}$. Следовательно,

$\tilde{\delta}_n(\tilde{c}) = h_{n+1}^{-1}\beta_n\beta_{n-1}b' = 0$, в виду $\beta_n\beta_{n-1} = 0$. Таким образом, построенное в начале доказательства соответствие $c \mapsto a$ порождает гомоморфизм $\tilde{\delta}_n : H^n(\mathcal{C}) \to H^{n+1}(\mathcal{A})$.

Диаграмма коммутативна и, следовательно, $\beta_n h_n = h_{n+1}\alpha_n$. Поэтому $h_n(\mathrm{Ker}(\alpha_n)) \subset \mathrm{Ker}(\beta_n)$ и $h_n(\mathrm{Im}(\alpha_{n-1})) \subset \mathrm{Im}(\beta_{n-1})$. Таким образом, гомоморфизм h_n порождает гомоморфизм $\tilde{h}_n : H^n(\mathcal{A}) \to H^n(\mathcal{B})$. Аналогично гомоморфизм l_n порождает гомоморфизм $\tilde{l}_n : H^n(\mathcal{A}) \to H^n(\mathcal{B})$.

Мы построили последовательность $(**)$. Докажем теперь её точность. Начнем с точности в члене $H^n(\mathcal{B})$. Равенство $l_n h_n = 1$ влечет $\tilde{l}_n\tilde{h}_n = 1$. Осталось доказать, что любой элемент $\tilde{b} \in \mathrm{Ker}(\tilde{l}_n)$ принадлежит $\mathrm{Im}(\tilde{h}_n)$. По определению $\tilde{b} = b + \mathrm{Im}(\tilde{\beta}_{n-1})$, где $\beta_n(b) = 0$ и $l_n(b) = \gamma_{n-1}(c')$, $c' \in \mathcal{C}^{n-1}$. В виду точности столбца, $c' = l_{n-1}(b')$, где $b' \in \mathcal{B}^{n-1}$. Положим $b" = \beta_{n-1}(b')$. Элемент $\bar{b} = b - b"$ тоже представляет элемент $\tilde{b}$, причем, в виду коммутативности диаграммы, $l_n(\bar{b}) = 0$. Поэтому, в виду точности столбца, $\bar{b} = h_n(a)$, где $a \in \mathcal{A}^n$. Более того $\alpha_n(a) = 0$, в виду $\beta_n(\bar{b}) = \beta_n(b) = 0$ и коммутативности диаграммы. Это означает, что класс $\tilde{a} \in H^n(\mathcal{A})$ в котором лежит a переходит в $\tilde{b}$ под действием $\tilde{l}_n$.

Докажем точность последовательности $(**)$ в члене $H^n(\mathcal{A})$. Рассмотрим $\tilde{c} \in H^{n-1}(\mathcal{C})$ и элемент $c \in \mathrm{Ker}(\gamma_{n-1})$, представляющий класс $\tilde{c}$. В виду точности столбца, существует элемент $b \in \mathcal{B}^{n-1}$ такой что $l_{n-1}(b) = c$. С другой стороны, согласно нашим определениям, элемент $\beta_{n-1}(b) \in \mathrm{Im}(\beta_{n-1})$ представляет класс $\tilde{h}_n\tilde{\delta}_{n-1}(\tilde{c})$. Таким образом, этот класс равен $0 \in H^n(\mathcal{B})$.

Осталось доказать, что любой элемент $\tilde{a} \in \mathrm{Ker}(\tilde{h}_n)$ принадлежит $\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1})$. По определению $\tilde{a} = a + \mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1})$, где $\alpha_n(a) = 0$ и $h_n(a) = \beta_{n-1}(b)$, $b \in \mathcal{B}^{n-1}$. Рассмотрим $c = l_{n-1}(b)$. Тогда, в виду коммутативности диаграммы и точности столбца, $\gamma_{n-1}c = l_n\beta_{n-1}b = l_n h_n a = 0$. Таким образом, c представляет некоторый класс $\tilde{c} \in H^{n-1}(\mathcal{C})$. С другой стороны, согласно нашему определению, $\tilde{\delta}_{n-1}(\tilde{c}) = \tilde{a}$.

Докажем точность последовательности $(**)$ в члене $H^n(\mathcal{C})$. Рассмотрим $\tilde{b} \in H^n(\mathcal{B})$ и элемент $b \in \mathrm{Ker}(\beta_n)$, представляющий класс $\tilde{b}$. Тогда, согласно нашим определениям, элемент $h_{n+1}^{-1}\beta_n l_n^{-1} l_n(b) = h_{n+1}^{-1}\beta_n(b) = 0$ представляет класс $\tilde{\delta}_n\tilde{l}_n(\tilde{b})$. Таким образом, $\tilde{\delta}_n\tilde{l}_n = 0$.

Осталось доказать, что любой элемент $\tilde{c} \in \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_n)$ принадлежит $\mathrm{Im}(\tilde{l}_n)$. Рассмотрим элемент $c \in \mathrm{Ker}(\gamma_n)$, представляющий класс $\tilde{c}$. Условие $\tilde{\delta}_n(\tilde{c}) = 0$ означает, что существуют такие $b \in \mathcal{B}^n$ и $a \in \mathcal{A}^n$, что $l_n(b) = c$ и $h_{n+1}\alpha_n(a) = \beta_n(b)$. Положим $\bar{b} = b - h_n(a)$. Тогда, в виду коммутативности диаграммы, $\beta_n(\bar{b}) = 0$ и, следовательно, $\bar{b}$ порождает некоторый элемент из $\tilde{b} \in H^n(\mathcal{B})$. С другой стороны, $l_n(\bar{b}) = l_n(b) = c$ виду точности столбца. Таким образом, $\tilde{l}_n(\bar{b}) = \tilde{c}$. $\square$

6.4. **Когомологическая последовательность Майера-Вьеториса.** В этом разделе мы найдем формулу, позволяющую находить когомологии объединения двух гладких многообразий через когомологии каждого из них и когомологии их пересечения.

Пусть компактное гладкое многообразие M представлено в виде объединения двух открытых подмножеств $M = M_1 \bigcup M_2$ и пусть $N = M_1 \bigcap M_2$ — их пересечение. Обозначим через $\widetilde{M} = M_1 \coprod M_2$ их несвязное объединение.

Естественное отображение $\widetilde{M} \to M$ порождает гомоморфизм

$$h_n : \mathcal{E}^n(M) \to \mathcal{E}^n(\widetilde{M}) = \mathcal{E}^n(M_1) \oplus \mathcal{E}^n(M_2).$$

Естественные отображения $M_i \to \widetilde{M} = M_1 \coprod M_2$ порождают ограничения $\bar{l}^i : N = M_1 \bigcap M_2 \to \widetilde{M} \quad (i = 1, 2)$. Эти отображения порождают гомоморфизмы

$$l_n^i : \mathcal{E}^n(\widetilde{M}) \to \mathcal{E}^n(N) \quad \text{и} \quad l_n = l_n^2 - l_n^1 : \mathcal{E}^n(\widetilde{M}) \to \mathcal{E}^n(N).$$

Мы получили последовательность гомоморфизмов векторных пространств

$$0 \to \mathcal{E}^n(M) \xrightarrow{h_n} \mathcal{E}^n(M_1) \oplus \mathcal{E}^n(M_2) \xrightarrow{l_n} \mathcal{E}^n(N) \to 0,$$

которая называется *короткой последовательностью Майера-Вьеториса.*

Лемма 6.4. *Короткая последовательность Майера-Вьеториса точна.*

Proof. Если $\omega \in \mathcal{E}^n(M)$ и $\omega \neq 0$, то $h_n(\omega) \neq 0$, а это и означает точность последовательности в члене $\mathcal{E}^n(M)$.

Рассмотрим множество $\mathcal{E}$, состоящее из дифференциальных форм $\omega_1 \oplus \omega_2 \in \mathcal{E}^n(M_1) \oplus \mathcal{E}^n(M_2)$ таких что $\omega_1|_N = \omega_2|_N$. Тогда $h_n(\mathcal{E}^n(M)) = \mathcal{E}$ и $l_n(\mathcal{E}) = 0$. А это и означает точность последовательности в члене $\mathcal{E}^n(M_1) \oplus \mathcal{E}^n(M_2)$.

Точность последовательности в члене $\mathcal{E}^n(N)$ означает сюръективность гомоморфизма l_n. Рассмотрим произвольную дифференциальную форму $\nu \in \mathcal{E}^n(N)$. Рассмотрим разбиение единицы (ρ_1, ρ_2), подчиненное покрытию (M_1, M_2) многообразия M (задача 5.4). Другими словами, ρ_i — это неотрицательные функции на M с носителями, принадлежащими M_i, такими, что $\rho_1 + \rho_2 = 1$. Рассмотрим теперь сечения $\nu_i = \rho_{3-i}\nu$. Тогда $\nu_i \in \mathcal{E}^n(M_i)$ и $l_n((-\nu_1) \oplus (\nu_2)) = \nu_1 + \nu_2 = \nu$. □

Задача 6.8. *Докажите, что векторные пространства $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}^n = \mathcal{E}^n(M)$, $\mathcal{B}^n = \mathcal{E}^n(M_1) \oplus \mathcal{E}^n(M_2)$ и $\mathcal{C}^n = \mathcal{E}^n(M_1 \cap M_2)$ удовлетворяют условиям теоремы 6.3, где h, l, α, β, γ — это вложения и α_i, β_i, γ_i — это дифференцирование дифференциальных форм.*

Таким образом, согласно теореме 6.3 имеет место

Теорема 6.4. *Короткая последовательность Майера-Вьеториса порождает точную последовательность гомологий*

$$0 \to H^0(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{h}_0} H^0(M_1, \mathbb{R}) \oplus H^0(M_2, \mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{l}_0} H^0(M_1 \cap M_2, \mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{\delta}_0} H^1(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{h}_1}$$

$$H^1(M_1, \mathbb{R}) \oplus H^1(M_2, \mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{l}_1} H^1(M_1 \cap M_2, \mathbb{R}) \xrightarrow{\tilde{\delta}_1} H^2(M, \mathbb{R})...,$$

которая называется длинной последовательностью Майера-Вьеториса

Задача 6.9. *Пусть $\omega \in H^n(M_1 \cap M_2)$. Тогда $\tilde{\delta}_n(\omega) \in H^{n+1}(M)$ является когомологическим классом формы ξ, где $\xi|_{M_1} = -d(\rho_2\omega)$ и $\xi|_{M_2} = d(\rho_1\omega)$.*

6.5. **Примеры вычисления когомологий.** Для краткости мы будем писать $H^n(M)$ вместо $H^n(M,\mathbb{R})$.

Пример 6.1. *Найдем когомологии окружности S^1.*

Представим окружность в виде объединения двух интервалов I_1 и I_2. Тогда, согласно лемме 6.1, $H^0(S^1) = H^0(I_i) = \mathbb{R}$ и $H^0(I_1 \cap I_2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Согласно лемме Пуанкаре, $H^1(I_i) = H^1(I_1 \cap I_2) = 0$. Таким образом, начало длинной последовательности Майера-Вьеториса имеет вид

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{h_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{l_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_0} H^1(S^1) \xrightarrow{h_1} 0 \xrightarrow{l_1} 0.$$

Следовательно, $H^1(S^1) = \mathbb{R}$.

Пример 6.2. *Найдем когомологии сферы S^k.*

Докажем, что $H^n(S^k) = \mathbb{R}$ при $n = 0, k$ и $H^n(S^k) = 0$ в остальных случаях. Будем доказывать индукцией по k. Для $k = 1$ нужное утверждение уже доказано. Пусть нужное утверждение доказано для всех $k < N$. Рассмотрим случай $k = N > 1$.

Представим сферу S^k в виде объединения двух $k-1$-мерных дисков D_1, D_2 гомотопных точке и с пересечением $D_1 \cap D_2$ гомотопным S^{k-1}. Начало последовательности Майера-Вьеториса имеет вид

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{h_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{l_0} \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_0} H^1(S^k) \xrightarrow{h_1} H^1(D_1) \oplus H^1(D_2) \xrightarrow{l_1} H^1(D_1 \cap D_2) \ldots.$$

Таким образом, $\mathtt{Im}(\delta_0) = 0$, причем $H^1(D_1) = H^1(D_2) = 0$. Поэтому из точности последовательности следует, что $H^1(S^k) = 0$. Рассмотрим теперь участок

$$H^{r-1}(D_1) \oplus H^{r-1}(D_2) \xrightarrow{l_{r-1}} H^{r-1}(D_1 \cap D_2) \xrightarrow{\delta_{r-1}} H^r(S^k) \xrightarrow{h_r} H^r(D_1) \oplus H^r(D_2).$$

Он эквивалентен

$$0 \xrightarrow{l_{r-1}} H^{r-1}(S^{k-1}) \xrightarrow{\delta_{r-1}} H^r(S^k) \xrightarrow{h_r} 0.$$

Откуда $H^r(S^k) = H^{r-1}(S^{k-1})$. По предположению индукции отсюда следует, что $H^r(S^k) = 0$ при $r \neq k$ и $H^r(S^k) = \mathbb{R}$ при $r = k$.

Лемма 6.5. *Дифференциальная k-форма ω на S^k точна, если и только если $\int\limits_{S^k} \omega = 0$. Это же верно и для финитных форм на $\mathbb{R}^k$.*

Proof. Интеграл $\int\limits_{S^k} \omega$ от точной формы $\omega = d\eta$ равен 0. Для доказательства достаточно разбить сферу на 2 полусферы $S^k = N_1 \cup N_2$ с общей границей $\Gamma = N_1 \cup N_2$. Тогда $\int\limits_{S^k} \omega = \int\limits_{N_1} d\eta + \int\limits_{N_2} d\eta$. С другой стороны,согласно формуле Стокса, $\int\limits_{N_1} d\eta = \int\limits_{\partial N_1} \eta$ и $\int\limits_{N_2} d\eta = \int\limits_{\partial N_2} \eta$. Границы ∂N_1 и ∂N_2 совпадают, но имеют противоположную ориентацию, откуда $\int\limits_{\partial N_1} \eta = -\int\limits_{\partial N_2} \eta$.

Сопоставим финитной дифференциальной форме μ на $\mathbb{R}^k$. Для этого рассмотрим диффеоморфизм $\mathbb{R}^k$ на сферу без точки $S^k \setminus p$, рассмотрим образ формы μ под действием этого диффеоморфизма и дополним его 0 до дифференциальной формы $\tilde{\mu}$ на S^k. Одна из этих форм точна, если и только если точна другая. Интегралы этих форм по пространством, где они определены, совпадают.

Пусть f финитная положительная функция на $\mathbb{R}^k$ и $\mu = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Тогда $\int\limits_{S^k} \tilde{\mu} = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu > 0$ и, следовательно, как мы уже доказали, форма $\tilde{\mu}$ не является точной. Согласно примеру 6.2, отсюда следует, что всякая k-форма на сфере имеет вид $\omega = a\mu + \nu$, где ν – точная форма. Таким образом, при $a = 0$ форма точна и $\int\limits_{S^k} \omega = 0$, при $a \neq 0$ форма не точна и $\int\limits_{S^k} \omega \neq 0$. □

Теорема 6.5. *Старшие когомологии компактного ориентируемого гладкого k-мерного многообразия M одномерны. То есть $H^k(M) = \mathbb{R}$.*

Proof. Разбивая многообразие M на 2 части и применяя к ним, так же как в лемме 6.5, формулу Стокса, доказываем, что $\int\limits_M \omega = 0$, если ω — точная форма.

Докажем, что верно и обратное утверждение: k-форма ω точна, если $\int\limits_M \omega = 0$. Покроем M конечным набором стягиваемых областей $M = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_k$. Рассмотрим разбиение единицы $\{\psi_k\}$, подчиненное покрытию $U_1 \dots, U_n$. Положим

$$\omega_k = \psi_k \omega \quad \text{и} \quad a_k = \int\limits_M \omega_k.$$

Выберем теперь стягиваемую область U_0 такую, что каждое объединение $U_0 \cup U_k$ содержится в некоторой стягиваемой области V_k. (Это всегда можно сделать, взяв достаточно маленькую область U_0.) Фиксируем на U_0 финитную k-форму ω_0 такую что $\int\limits_{U_0} \omega_0 = 1$. (Это всегда можно сделать согласно лемме 6.5.)

Рассмотрим формы $\xi_k = \omega_r - a_k \omega_0$. Тогда $\int\limits_M \xi_k = 0$ и, следовательно, согласно лемме 6.5, форма ξ_k точна. Таким образом, $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ — тоже точная форма. С другой стороны, $\xi = \omega - a\omega_0$, где $a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Мы уже доказали, что интеграл точной формы равен 0. Поэтому, интегрируя равенство $\xi = \omega - a\omega_0$ по M, находим, что $a = 0$ и, следовательно, $\omega = \xi$ — точная форма.

Если k-форма χ на M не точна, то как мы уже знаем, $A = \int\limits_M \chi \neq 0$. Положим $\eta = \chi - A\omega_0$. Тогда $\int\limits_M \eta = 0$ и, следовательно, дифференциальная форма η точна. Таким образом, $\chi = A\omega_0 + \eta$. То есть $H^2(M) = \mathbb{R}$. □

Пример 6.3. *Найдем первые когомологии двумерного тора $T = S^1 \times S^1$.*

Представим T в виде объединения двух цилиндров D_1 и D_2, пересечение которых состоит из 2 колец. Точная последовательность Майера-Вьеториса имеет вид

$$0 \to H^0(T) \xrightarrow{h_0} H^0(D_1) \oplus H^0(D_1) \xrightarrow{l_0} H^0(D_1 \cap D_2) \xrightarrow{\delta_0} H^1(T))$$
$$\xrightarrow{h_1} H^1(D_1) \oplus H^1(D_2) \xrightarrow{l_1} H^1(D_1 \cap D_2) \xrightarrow{\delta_1} H^2(T) \xrightarrow{h_2} H^2(D_1) \oplus H^2(D_2).$$

Согласно тереме 6.5, она эквивалентна

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{h_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{l_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_0} H^1(T) \xrightarrow{h_1} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{l_1} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_0} \mathbb{R} \xrightarrow{h_1} 0,$$

откуда

$$0 \to \mathbb{R} \to H^1(T) \to \mathbb{R} \to 0.$$

Таким образом, $H^1(T) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Задача 6.10. *Найти первые когомологии всех компактных ориентируемых поверхностей.*

7. Риманова геометрия

7.1. **Риманова метрика.** Введем теперь на произвольном гладком компактном многообразии M размерности r структуру, позволяющую измерять на ней дины кривых, углы между ними, объёмы и д.п. Идея состоит в том, чтобы для каждой точки $p \in M$ ввести структуру евклидова пространства на касательном пространстве T_p, причем сделать это так, чтобы эта структура менялась от точки к точке гладким образом.

Строгое определение даётся в терминах векторных расслоений. Рассмотрим квадрат кокасательного расслоения $\pi_2^* : T^*M \otimes T^*M \to M$ и его гладкое сечение $\tilde{g} \in \mathcal{F}_{\pi_2^*}(M)$. На каждом касательном пространстве T_pM в точке $p \in M$ сечение $\tilde{g}$ порождает билинейную форму $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ по правилу $g_p(v_p, w_p) = \tilde{g}|_p(v_p \otimes w_p)$.

Объединение билинейных форм на касательных пространствах $g = \bigcup\limits_{p \in M} g_p$ образует билинейную форму $g : \mathcal{F}_\pi(M) \times \mathcal{F}_\pi(M) \to \mathbb{R}$ на пространстве гладких векторных полей $\mathcal{F}_\pi(M)$, то есть на пространстве сечений касательного расслоения $\pi : TX \to M$.

Билинейная форма g называется *римановой метрикой*, если её ограничение g_p в любой точке $p \in M$ является симметричной (то есть $g(v', v'') = g(v'', v')$) и положительно определенной (то есть $g(v, v) > 0$ при $v \neq 0$) билинейной формой на касательном пространстве T_pM. Многообразие M с выбранной римановой билинейной формой называется *римановым многообразием*.

Пример 7.1. *В векторном пространстве V с базисом $e_1, \ldots, e_r$ рассмотрим сопряженный базис $l_1, \ldots, l_r$ и биковектор $\sum\limits_{i=1}^{r} l_i \otimes l_i$. Порождает стандартную метрику на V, где $(a^i e_i, b^j e_j) = \sum\limits_{i=1}^{r} a^i b^i$.*

Рассмотрим многообразие M, вложенное в V. Касательное пространство в точке $p \in M$ можно интерпретировать как аффинное подпространство в V. Ограничения метрики V на эти подпространства задает на M структуру риманова многообразия.

Можно доказать, что на каждом многообразии со счетной базой можно определить структуру риманова многообразия. Более того, это можно сделать многими разными способами. многообразия

Риманова структура g на M позволяет отождествить касательное $T_p(M)$ и кокасательное пространство $T_p^*(M)$ в точке $p \in M$. А именно, мы сопоставляем вектору $v \in T_p(M)$ линейную форму $l(w) = g_p(w, v)$. Это отождествляет касательное и кокасательное расслоение.

Посмотрим, как структура риманова многообразия описывается *в локальной карте*. Рассмотрим локальную карту (U, φ), где $\varphi : U \to \mathbb{R}^r = \{(x^1, \ldots, x^r)\}$ и

перенесем координаты $\{(x^1, \dots, x^r)\}$ на U. Тогда вектора $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^r})$ образуют базис в каждом касательном пространстве $T_p(M)$, где $p \in U$.

Билинейная форма в локальной карте имеет вид $\tilde{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Её значение на векторах $v = v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, $v = w^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}$ равно

$$g(v, w) = g_{ij} v^i w^j \quad \text{, где} \quad g_{ij} = g(\partial x^i, \partial x^j).$$

Таким образом, матрица Грамма $g_{ij} = g_{ij}(U, \varphi)$ целиком определяет метрику на локальной карте.

Задача 7.1. *Найти как меняется матрица Грамма при замене локальной карты.*

Риманова метрика на многообразии позволяет определить *длину кривой*. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma : [0, 1] \to M$. В каждой точке кривой определен касательный вектор к кривой в точке $p = \gamma(t_0)$ $\gamma_p = \frac{\partial \gamma(t)}{dt}|_{t_0}$. Интеграл по кривой его длины $\sqrt{g(\gamma_p, \gamma_p)}$ называется длиной кривой.

Посмотрим как это выглядит в локальной карте. Рассмотрим содержащую кривую локальную карту (U, φ), где $\varphi : U \to \mathbb{R}^r = \{(x^1, \dots, x^r)\}$. Перенося координаты $\{(x^1, \dots, x^r)\}$ на U можно считать, что $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^r(t))$. Касательные вектор в точке $p = \gamma(t) \subset M$ равен $\gamma_p = \frac{\partial \gamma^i(t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^i}$. Его длина равна $\sqrt{g(\gamma_p, \gamma_p)} = \sqrt{g_{ij} \frac{\partial \gamma^i(t)}{\partial t} \frac{\partial \gamma^j(t)}{\partial t}}$. Длиной кривой называется интеграл длины касательного вектора

$$||\gamma|| = \int_0^1 \sqrt{g_{ij} \frac{\partial \gamma^i(t)}{\partial t} \frac{\partial \gamma^j(t)}{\partial t}} dt.$$

Для кривой составленной из отрезков — это длина ломаной. Предел ломаных, аппроксимирующих γ дает длину $||\gamma||$.

Угол между кривыми $\gamma' : [0, 1] \to M$, $\gamma'' : [0, 1] \to M$ в общей точке $\gamma'(0) = \gamma''(0) = p$ определяется как угол между их касательными в этой точке. То есть

$$\frac{g(\gamma'_p, \gamma''_p)}{\sqrt{g(\gamma'_p, \gamma'_p) g(\gamma''_p, \gamma''_p)}}.$$

Метрика на многообразии позволяет считать *объемы* его ориентируемых подмножеств, подобно тому как это происходит в евклидовом пространстве.

Для вычисления объем подмножества N евклидова пространства $\mathbb{R}^r = \{x^1, \dots, x^r\}$ со стандартными базисными векторами мы интегрируем по N дифференциальную форму объема $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r$. Если базис не ортонормирован и его матрица Грамма равна g_{ij}, то объем дается интегралом от формы объема $\det(g_{ij} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r$, описывающей объем параллелепипеда натянутого на базисные вектора.

На произвольном многообразии подобная форма тоже называется формой объема. В локальной карте (U, φ) она имеет вид

$$\omega = \sqrt{\det(g_{ij}(x))} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r.$$

Объем ориентируемой области $N \subset M$ находится как

$$V(N) = \int_N \omega.$$

7.2. **Алгебра векторных полей.** Векторными полями на гладком многообразии M называются гладкие сечения касательного расслоение $\pi : TX \to M$. Множество векторных поле образует бесконечномерное вещественное векторное пространство $\mathcal{V} = \mathcal{V}(M)$. Более того, они образуют модуль над кольцом гладких функций $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$ на M.

Согласно нашим определениям, векторное поле $V \in \mathcal{V}$ порождает дифференцирование $V_p : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ в каждой точке $p \in M$. Оператор V_p определяется условиями

$$V_p(f+g) = V_p(f) + V_p(g); \quad V_p(kf) = kV_p(f) \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{R};$$
$$V_p(fg) = V_p(f)g(p) + f(p)V_p(g).$$

Таким образом векторное поле V порождает отображение $V : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, сопоставляя функции $f \in \mathcal{F}$ функцию $V(f)(p) = V_p(f)$. Свойства оператора дифференцированию переходят в условие линейности

$$V(f+g) = V(f) + V(g); \quad V(kf) = kV(f) \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{R};$$

и правило Лейбница

$$V(fg) = V(f)g + fV(g).$$

Рассмотрим теперь произвольный линейный оператор $V : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ удовлетворяющий правилу Лейбница. Тогда оператор $V_p(f) = V(f)(p)$ является дифференцированием в каждой точке p, то есть вектором. Таким образом оператор V порождает векторное поле.

Подведем итог: линейные операторы $V : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ удовлетворяющие правилу Лейбница взаимнооднозначно отвечают векторным полям на M.

Рассмотрим оператор коммутирования векторных полей $[V, W] = VW - WV : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$. Докажем, что он тоже дифференцирование, то есть линеен и удовлетворяет правилу Лейбница. Действительно

$$[V,W](f+g) = VW(f+g) - WV(f+g) = \big(VW(f) + VW(g)\big) - \big(WV(f) + WV(g)\big) =$$
$$\big(VW(f) - WV(f)\big) + \big(VW(g) - WV(g)\big) = [V,W](f) + [V,W](g).$$

Аналогично,

$$[V,W](kf) = k[V,W](f).$$

Кроме того,

$$VW(fg) = V\big(W(f)g + fW(g)\big) = V\big(W(f)g\big) + V\big(fW(g)\big) =$$
$$VW(f)g + W(f)V(g) + V(f)W(g) + fVW(g).$$

Следовательно,

$$[V,W](fg) = VW(fg) - WV(fg) = \big(VW(f)g + W(f)V(g) + V(f)W(g) + fVW(g)\big) -$$
$$\big(WV(f)g + V(f)W(g) + W(f)V(g) + fWV(g)\big) =$$
$$\big(VW(f)g - WV(f)g\big) + \big(fVW(g) - fWV(g)\big) = [V,W](f)g + f[V,W](g).$$

Исследуем свойства оператора коммутирования. Из определения сразу следует, что

$$[V,W] = -[W,V].$$

Кроме того,

$$[[V,W],U] = [(VW-WV),U] = [(VW-WV),U] = VWU - UVW - WVU + UWV.$$

Аналогично,

$$[[W,U],V] = WUV - VWU - VUW + WVU, \quad [[U,V],W] = UVW - WUV - UWV + VUW.$$

Следовательно,

$$[[V,W],U] + [[W,U],V] + [[U,V],W] = 0.$$

Таким образом

Теорема 7.1. *Векторные поля образуют алгебру Ли относительно операции коммутирования* $(V,W) \mapsto [V,W]$.

7.3. **Аффинная связность.** Как мы знаем, векторное поле $X \in \mathcal{V} = \mathcal{V}(M)$ однозначно определяет оператор дифференцирования функций

$$X : \mathcal{F} \to \mathcal{F},$$

переводящий функцию $f(p)$ в функцию $X(f)(p) = X_p(f)$.

Ковариантное дифференцирование — это аналог такого оператора на множестве векторных полей. Мы также требуем от него линейности и аналога правила Лейбница.

Ковариантным дифференцированием по направлению векторного поля $X \in \mathcal{V}$ называется отображение множества векторных полей в себя

$$\nabla_X : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

со свойствами

$$\nabla_X(V+W) = \nabla_X V + \nabla_X W; \quad \nabla_X(kV) = k\nabla_X V \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{R};$$
$$\nabla_X(fV) = X(f)V + f\nabla_X V \quad \text{для} \quad f \in \mathbb{F}.$$

Аффинной связностью на гладком многообразии M называется отображение ∇, сопоставляющее каждому векторному X полю некоторое ковариантное дифференцирование ∇_X по направлению этого векторного поля так, что

$$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y.$$

Посмотрим как описывается ковариантное дифференцирование в локальной карте. Рассмотрим локальную карту (U,φ), где $\varphi : U \to \mathbb{R}^r = \{(x^1,\dots,x^r)\}$ и перенесем координаты $\{(x^1,\dots,x^r)\}$ на U. Тогда векторные поля $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $(i = 1,\dots,r)$ образуют базис множества векторных полей $\mathcal{V}(U)$ как модуля над функциями $\mathcal{F}(U)$.

Рассмотрим два произвольных векторных поля

$$V = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{и} \quad W = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Тогда

$$\nabla_V W = \nabla_{v^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \big(w^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big) = v^i \big(\frac{\partial w^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + w^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}\big).$$

Разложим последнее векторное поле по базисным полям

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Гладкие функции Γ_{ij}^k называются *коэффициентами связности* или *символами Кристоффеля.* (Они разумеется, зависят от выбора локальной карты.)

Зная коэффициенты связности мы можем найти ковариантную производную одного векторного поля по другому векторному полю по формуле

$$\nabla_{v^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \big(w^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big) = v^i \frac{\partial w^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + v^i w^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Таким образом

$$\nabla_{v^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \big(w^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big) = U^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{, где} \quad U^k = v^i \big(\frac{\partial w^k}{\partial x^i} + w^j \Gamma_{ij}^k\big).$$

7.4. **Аффинная связность, согласованная с римановой метрикой.** Пусть ∇ и g — аффинная связность связность и риманова метрика на гладком многообразии M. Они называются *согласованными*, если для любых векторных поле X, Y, Z на M выполняется

$$1. \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y];$$
$$2. \quad Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

(В этом случае говорят также, что ∇ — это *связностью Леви-Чивита* метрики g.)

Первое условие, как мы дальше увидим, носит характер нормировки и означает симметрию связности. Второе условие — это аналог правила Лейбница для дифференцирования римановой метрики.

Подставляя первое условие во второе находим,

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_X Z - [X, Z], Y) + g(X, \nabla_Z Y) =$$
$$g(Y, \nabla_X Z) + g(X, \nabla_Z Y) + g(Y, [Z, X]).$$

Переставляя поля находим

$$Yg(Z, X) = g(X, \nabla_Z Y) + g(Z, \nabla_Y X) + g(X, [Y, Z]),$$
$$Xg(Y, Z) = g(Z, \nabla_Y X) + g(Y, \nabla_X Z) + g(Z, [X, Y]).$$

Складывая первые два соотношения и вычитая третье находим

(3)
$$2g(X, \nabla_Z Y) = Zg(X, Y) + Yg(Z, X) - Xg(Y, Z) + g(Y, [X, Z]) + g(X, [Z, Y]) + g(Z, [X, Y]).$$

Таким образом, риманова метрика g полностью определяет по формуле (1) согласованную с ней аффинную связность, если она существует. Существование нужной связности будет доказано, если мы докажем, что отображение $\nabla_Z : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ построенное по g с помощью формулы (1) является аффинной связностью, согласованной с римановой метрикой g.

Докажем сначала, что ∇_Z — ковариантное дифференцирование. Условие $\nabla_Z(aX + bY) = a\nabla_Z X + b\nabla_Z Y$, где $a, b \in \mathbb{R}$, следуют из соответствующих свойств правой части формулы (1).

Отметим теперь, что $Zg(X, fY) = Z(fg(X, Y)) = Z(f)g(X, Y) + fZg(X, Y))$ и $g(X, [Z, fY]) = g(X, Z(fY) - fYZ) = g(X, Z(f)Y + fZY - fYZ) = g(X, Z(f)Y + f[Z, Y]) = g(X, Z(f)Y) + g(X, f[Z, Y]) = Z(f)g(X, Y) + fg(X, [Z, Y])$.

Таким образом.

$$2g(X,\nabla_Z fY) = Zg(X,fY)+fYg(Z,X)-Xg(fY,Z)+g(fY,[X,Z])+g(X,[Z,fY])+g(Z,[X,fY]) =$$

$$2fg(X,\nabla_Z Y) + Z(f)g(X,Y) - X(f)g(Y,Z) + Z(f)g(X,Y) + X(f)g(Z,Y) =$$

$$2fg(X,\nabla_Z Y) + 2Z(f)g(X,Y).$$

Откуда следует "правило Лейбница"

$$\nabla_Z fY = f\nabla_Z Y + Z(f)Y.$$

Докажем теперь, что семейство ковариантных дифференцирований ∇_Z образует аффинную связность.

Условие $\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$ следуют из соответствующих свойств правой части формулы (1). Для доказательства свойства $\nabla_{fZ}Y = f\nabla_Z Y$ мы опять воспользуемся равенствами $Zg(X,fY) = Z(f)g(X,Y) + fZg(X,Y))$ и $g(X,[Z,fY]) = Z(f)g(X,Y) + fg(X,[Z,Y])$.

Тогда

$$2g(X,\nabla_{fZ}Y) = fZg(X,Y)+Yg(fZ,X)-Xg(Y,fZ)+g(Y,[X,fZ])-g(X,[Y,fZ])+g(fZ,[X,Y]) =$$

$$fZg(X,Y) + Y(f)g(Z,X) + fYg(Z,X) - X(f)g(Y,Z) - fXg(Y,Z) + fg(Y,[X,Z])+$$

$$X(f)g(Y,Z) - fg(X,[Y,Z]) - Y(f)g(X,Z) + fg(Z,[X,Y]) =$$

$$2fg(X,\nabla_Z Y)+Y(f)g(Z,X)-X(f)g(Y,Z)+X(f)g(Y,Z)-Y(f)g(X,Z) = 2fg(X,\nabla_Z Y).$$

Таким образом оператор ∇_Z — это аффинная связность. Докажем, что она согласована с римановой метрикой g, то есть удовлетворяет условиям согласования 1. и 2.

Условие 1 получается если вычесть из соотношения (1) и это же соотношение с перестановкой Y и Z

$$2g(X,\nabla_Z Y)-2g(X,\nabla_Y Z) = \big(Zg(X,Y)+Yg(Z,X)-Xg(Y,Z)\big)-\big(Yg(X,Z)+Zg(Y,X)-Xg(Z,Y)\big)+$$

$$\big(g(Y,[X,Z])+g(X,[Z,Y])+g(Z,[X,Y])\big)-\big(g(Z,[X,Y])+g(X,[Y,Z])+g(Y,[X,Z])\big) = 2g(X,[Z,Y]).$$

Условие 2 получается если сложить (1) и это же соотношение с перестановкой X и Y

$$2g(X,\nabla_Z Y)+2g(Y,\nabla_Z X) = \big(Zg(X,Y)+Yg(Z,X)-Xg(Y,Z)\big)+\big(Zg(Y,X)+Xg(Z,Y)-Yg(X,Z)\big)+$$

$$\big(g(Y,[X,Z])+g(X,[Z,Y])+g(Z,[X,Y])\big)+\big(g(X,[Y,Z])+g(Y,[Z,X])+g(Z,[Y,X])\big) = 2Zg(X,Y)$$

Дадим теперь *координатное описание* аффинной связности. Зафиксируем локальную карту и локальные координаты $\{x^1,\dots,x^r\}$, которые она порождает. Положим $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ и $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Согласно нашим определениям,

$$\nabla_X Y = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

и

$$g(X,Y) = g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}) = g_{ij}.$$

Тогда соотношение

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y];$$

означает, что

$$0 = \big[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\big] = [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k} = (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

То есть

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$$

Соотношение

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

означает, что функция

$$Zg(X, Y) = \frac{\partial}{\partial x^k} g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

равна

$$g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) = g(\Gamma^l_{ki}\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j}) + g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma^l_{kj}\frac{\partial}{\partial x^l}) = g_{lj}\Gamma^l_{ki} + g_{li}\Gamma^l_{kj}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{lj}\Gamma^l_{ki} + g_{li}\Gamma^l_{kj}.$$

Формула

$$2g(X, \nabla_Z Y) = Zg(X, Y) + Yg(Z, X) - Xg(Y, Z) + g(Y, [X, Z]) + g(X, [Z, Y]) + g(Z, [X, Y])$$

дает прямое описание символов Кристоффеля через структурные константы римановой метрики g_{ij}. Она означает, что

$$g(X, \nabla_Z Y) = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^j}) = g\big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \Gamma^l_{kj}\frac{\partial}{\partial x^l}\big) = g_{il}\Gamma^l_{kj}$$

равно

$$\frac{1}{2}\big(Zg(X, Y) + Yg(Z, X) - Xg(Y, Z) + g(Y, [X, Z]) + g(X, [Z, Y]) + g(Z, [X, Y])\big) =$$

$$\frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x^k} g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) + \frac{\partial}{\partial x^j} g(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}) - \frac{\partial}{\partial x^i} g(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k})\big) =$$

$$\frac{1}{2}\big(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\big).$$

То есть

$$\Gamma^l_{kj} = \frac{1}{2} g^{il}\big(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\big).$$

7.5. **Параллельный перенос и геодезические.** Рассмотрим гладкую кривую $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^r) : [0,1] \to M$ без самопересечений такую, что $\dot\gamma(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} \neq 0$. Кривая $\gamma(t)$ порождает гладкое *векторное поле касательных векторов* $A_t \in T_{\gamma(t)}$ $(t \in [0,1])$, действующее на функции $f : M \to \mathbb{R}$ по правилу

$$A_t f = \frac{df(\gamma(t))}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\dot\gamma^i(t).$$

Так им образом

$$A_t = \dot\gamma^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Рассмотрим теперь произвольное гладкое векторное поле $Y_t = y^j(t)\frac{\partial}{\partial x^j} \in T_{\gamma(t)}$ $(t \in [0,1])$ на кривой $\gamma([0,1])$. Его ковариантная производная по полю A_t равна

$$\nabla_{A_t} Y_t = \nabla_{\dot\gamma^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}} y^j(t)\frac{\partial}{\partial x^j} = U^k(t)\frac{\partial}{\partial x^k},$$

где

$$U^k(t) = \dot\gamma^i(t)\Big(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}(t) + y^j(t)\Gamma^k_{ij}(t)\Big) = \frac{dy^k(\gamma(t))}{dt} + \dot\gamma^i(t)y^j(t)\Gamma^k_{ij}(t).$$

Таким образом,

$$\nabla_{A_t} Y_t = \Big(\frac{dy^k(\gamma(t))}{dt} + \dot\gamma^i(t)y^j(t)\Gamma^k_{ij}(t)\Big)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Векторное поле Y_t на кривой γ называется *полем параллельных векторов*, если $\nabla_{A_t} Y_t = 0$. То есть

$$\frac{dy^k(\gamma(t))}{dt} + \dot\gamma^i(t)y^j(t)\Gamma^k_{ij}(t) = 0 \quad \text{для всех} \quad k.$$

В этом случае говорят также что вектора Y_t являются *результатом параллельного переноса* вектора Y_0 вдоль кривой γ.

Задача 7.2. *Докажите что параллельный перенос вдоль кривой γ порождает обратимый линейный оператор $H_\gamma : T_aM \to T_bM$, где $a = \gamma(0)$, $b = \gamma(1)$.*

Задача 7.3. *Найти оператор H_γ для $\Gamma^k_{ij} = 0$.*

Замечание 7.1. *Построенный оператор $T_aM \to T_bM$ вообще говоря, зависит от кривой γ, соединяющей точки a и b даже, если $a = b$ и контур γ маленький. В этом случае он зависит о касательных $A, B \in T_aM$ контура γ в точке $a = b$. Таким образом в каждой точке $a \in M$ возникает линейный оператор $R_{A,B} : T_aM \to T_aM$. Это операторное поле $R_{A,B} = \nabla_A\nabla_B - \nabla_B\nabla_A - \nabla_{[A,B]}$ на M называется тензором кривизны.*

Пусть теперь связность ∇ согласована с римановой метрикой g. Рассмотрим произвольные векторы $X_0, Y_0 \in T_{\gamma(0)}$ и результат их параллельного переноса $X_t, Y_t \in T_{\gamma(t)}$ вдоль кривой γ. Тогда условие согласования связности и метрики дает

$$\frac{dg(X_t, Y_t)}{dt} = A_t g(X_t, Y_t) = g(\nabla_{A_t} X_t, Y_t) + g(X_t, \nabla_{A_t} Y_t) = 0.$$

Это означает, что скалярное произведение в касательном пространстве $T_{\gamma(0)}$ сохраняется при параллельном переносе вдоль γ.

Можно доказать, что это условие вместе с условием симметрии $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ эквивалентно согласованность связности и римановой метрики.

Кривая γ называется *геодезической*, если поле её касательных векторов $A_t = \dot\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ является полем параллельных векторов на γ. В координатной форме, это означает, что

$$\ddot\gamma^k + \Gamma^k_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j = 0 \quad \text{для всех} \quad t \quad \text{и} \quad k.$$

Пусть теперь связность ∇ согласована с римановой метрикой g. Тогда можно доказать, что геодезические — это кривые длина которых в метрике g меньше длин всех близких кривых с теми же концами.