Листок 3

W_t — винеровский процесс.

(1) Для пуассоновского процесса π_t найти среднее время достижения значения n.

(2) Число комаров, садящихся на жертву, является пуассоновским процессом с интенсивностью λ. Каждый комар кусает жертву с вероятностью p независимо от других. Доказать, что число укусов является пуассоновским процессом с интенсивностью $p\lambda$.

(3) Автомобильный поток представляет собой пуассоновский процесс интенсивности λ. Для перехода дороги вам нужен временной промежуток a. Пусть T — время, затраченное на переход. Докажите, что $\mathbb{E}T = \frac{e^{\lambda a}-1}{\lambda}$. Решить ту же задачу, если надо перейти две дороги с двумя потоками различной интенсивности, между которыми 1) можно сделать остановку, 2) нельзя сделать остановку.

(4) 1) Пусть $F : X \to Y$ — непрерывное отображение метрических пространств, $\{\mu_n\}$ — слабо сходящаяся последовательность мер на X. Доказать, что последовательность мер-образов $\mu_n \circ F^{-1}$ является слабо сходящейся.

2) Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных отображений $\xi_n : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$, причем $\xi = \lim_n \xi_n$ почти наверное. Используя теорему об ограниченной сходимости, доказать, что $\mu_{\xi_n} \to \mu_\xi$ слабо, где $\mu_n = P \circ \xi_n^{-1}$ — распределение ξ_n.

(5) Найти $P(W_t > 0, W_s > 0)$ (используйте подходящую замену переменных и полярную систему координат).

(6) Пусть W_t — винеровский процесс. Доказать, что следующие процессы являются винеровскими

$$-W_t,\ tW_{1/t},\ W_{t+s} - W_s,\ \frac{1}{a}W_{a^2t},\ W_{1-t} - W_1, \quad s > 0,\ a > 0.$$

(7) (Процесс Коши) Процессом Коши будем называть такой процесс C_t с независимыми приращениями, $C_0 = 0$, что $C_t - C_s, s < t$ имеет плотность распределения Коши с параметром $t - s$: $f = \frac{t-s}{\pi(x^2+(t-s)^2)}$. Найти конечномерные распределения C_t.

(8) Для непрерывной функции $f(t)$ на $[0,1]$ положим $X_t = \int_0^t W_s f(s)\, ds$. Доказать, что X_t — гауссовский процесс и найти $\mathbb{E}X_t$, $\mathbb{E}(X_t X_s)$.

(9) Пусть $s < t$. Докажите, что $\mathbb{E}(W_t|W_s) = W_s$ (используйте независимость приращений). Докажите прямым вычислением, что $\mathbb{E}(W_s|W_t) = \frac{s}{t}W_t$.

(10) Найти условную плотность W_t, $t_1 < t < t_2$ при условии $W_{t_1} = A$, $W_{t_2} = B$.