Математический анализ

Лектор д.ф.-м.н. В.В.Чепыжов *

Факультет математики ВШЭ, 2017 г. 2 семестр

Лекция 1 (10 января 2017)

§1. Евклидово пространство

Пусть задано действительное линейное пространство R. Напомним, что скалярным произведением в R называется действительная функция (x, y) определенная для каждой пары элементов $x, y \in R$, такая что:

1) $(x, y) = (y, x)$,
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Определение 1 *Линейное пространство с фиксированным в нем скалярным произведением называется евклидовым пространством.*

В евклидовом пространстве R вводится норма по формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Из свойств 1) - 4) следует, что выполнены все свойства нормы. Неравенство треугольника вытекает из неравенства Коши-Буняковского

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

которое мы докажем. Рассмотрим квадратичный трехчлен от действительной переменной λ:

$$\phi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) = \|x\|^2\lambda^2 + 2\lambda(x, y) + \|y\|^2,$$

который, очевидно, неотрицателен $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, т.к. $\phi(\lambda)$ это скалярный квадрат некоторого вектора. Следовательно, дискриминант этого трехчлена меньше или равен нулю, т. е.

$$\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x) \cdot (y, y) \leq 0. \quad (1)$$

*Компьютерный набор и верстка Антон Жевнерчук и Тимур Степанов.

Отметим, что в евклидовом пространстве сумма, умножение на число и скалярное произведение непрерывны, т. е., если $x_n \to x, y_n \to y$ (в смысле сходимости по норме), $\lambda_n \to \lambda$ (как числовая последовательность), то

$$x_n + y_n \to x + y,\ \lambda_n x_n \to \lambda x,\ (x_n, y_n) \to (x, y).$$

Это вытекает из неравенства Коши-Буняковского.

Наличие в R скалярного произведения позволяет ввести в этом пространстве не только норму (т. е. длину) вектора, но и угол между векторами: а именно угол φ между x и y определяется формулой

$$-1 \leq \cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1 \text{ (нер-во Коши-Буняковского).} \tag{2}$$

Следовательно, эта формула определяет некоторый угол $\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$.

Если $(x, y) = 0$, то из (2) получаем $\varphi = \frac{\pi}{2}$, в этом случае векторы x и y называются ортогональными.

Определение 2 *Система ненулевых векторов $\{x_\alpha\}$ в R называется ортогональной, если*

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \textit{ при } \alpha \neq \beta.$$

Утверждение 1 *Если векторы $\{x_\alpha\}$ ортогональны, то они линейно независимы.*

Доказательство. В самом деле, пусть

$$a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \cdots + a_n x_{\alpha_n} = 0.$$

Поскольку $\{x_\alpha\}$ - ортогональная система, имеем

$$(x_{\alpha_i}, a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \cdots + a_n x_{\alpha_n}) = a_i (x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) = 0.$$

Но $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \neq 0$ и, значит, $a_i = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ ■

Определение 3 *Если система $\{x_\alpha\}$ полна, т. е. наименьшее содержащее ее замкнутое подпространство есть все R, то $\{x_\alpha\}$ называется ортогональным базисом. Если при этом норма любого вектора равна 1, то система $\{x_\alpha\}$ называется ортогональным нормированным базисом в R.*

§2. Примеры евклидовых пространств и ортгональных базисов

Пример 1 *n-мерное вещественное пространство $\mathbb{R}^n$.*

Элементы – системы вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – образуют линейное векторное пространство со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{3}$$

Ортогональный нормированный базис в $\mathbb{R}^n$:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, \dots, 0)\\
e_2 &= (0, 1, \dots, 0)\\
&\vdots\\
e_n &= (0, 0, \dots, 1).
\end{aligned}
$$

Пример 2 *Пространство ℓ_2 с элементами*

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \text{ где } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty,$$

со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Абсолютная сходимость этого ряда следует из сходимости рядов $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2$ и из неравенства Коши-Буняковского

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \le \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^2 \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)^2$$

(по критерию Коши сходимости рядов).

Свойства 1) – 4) скалярного произведения проверяются непосредственно. Простейший ортогональный базис в ℓ_2:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, \dots)\\
e_2 &= (0, 1, \dots)\\
&\vdots\\
e_n &= (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \dots)
\end{aligned}
$$

Проверим полноту этой системы. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ – любой вектор из ℓ_2 и $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Тогда $x^{(n)}$ – это линейная комбинация $e_1, \dots, e_n, \dots$ и при этом $\|x - x^{(n)}\| = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2 \to 0$ при $n \to +\infty$.

Пример 3 *Пространство $C_2[a, b]$, состоящее из непрерывных действительных функций, со скалярным произведением*

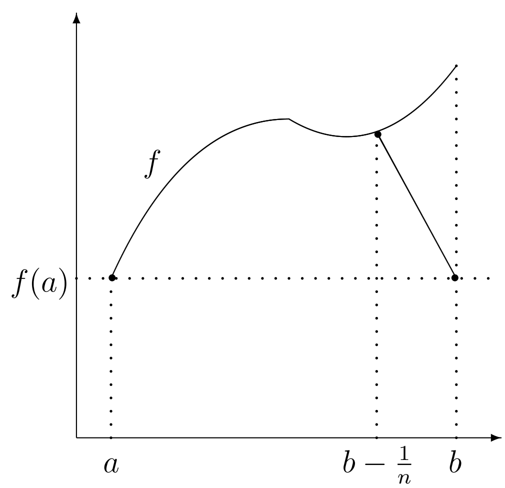
$$(f, g) = \int\limits_a^b f(t) g(t) dt. \tag{4}$$

Важный ортогональный базис – тригонометрическая система, состоящая из функций

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{2\pi}{b-a}nt,\ \sin\frac{2\pi}{b-a}nt\ (n=1,2,\dots) \tag{5}$$

Ортогональность проверяется непосредственно. На отрезке $[-\pi,\pi]$ получаем тригонометрическую систему: $\frac{1}{2}, \cos nt, \sin nt$.

Система (5) полна. Действительно, по теореме Вейерштрасса, всякая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция φ, принимающая на концах отрезка одинаковые значения, может быть представлена как предел равномерно сходящейся последовательности тригонометрических полиномов, т. е. линейных комбинаций элементов системы (5). Такая последовательность сходится к функции φ по норме пространства $C_2[a,b]$. Если же f – произвольная функция из $C_2[a,b]$, то ее можно представить как предел (по норме $C_2[a,b]$) последовательности функций φ_n, каждая из которых совпадает с f на отрезке $[a, b-\frac{1}{n}]$, линейная на $[b-\frac{1}{n}, b]$ и имеет в точке b значение $f(a)$. Следовательно, f можно приблизить сколь угодно точно (в метрике $C_2[a,b]$) линейными комбинациями системы (5). К доказательству теоремы Вейерштрасса мы еще вернемся.



φ_n

§3. Существование ортогональных базисов. Ортогонализация

Теперь мы будем рассматривать сепарабельные евклидовы пространства, т. е. содержащие счетное всюду плотное множество. В приведенных выше примерах все пространства сепарабельные.

Утверждение 1 *В сепарабельном пространстве всякая ортогональная система не более чем счетна.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемая ортогональная система $\{\varphi_\alpha\}$ является нормированной (иначе заменим ее на систему $\left\{\frac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|}\right\}$). При этом $\|\varphi_\alpha-\varphi_\beta\| = \sqrt{2}, \alpha\neq\beta$.

Рассмотрим совокупность шаров $B(\varphi_\alpha, 1/2)$. Эти шары не пересекаются. Если счетное множество $\{\psi_k\}$ всюду плотно в R, то в каждом таком шаре есть какой-то элемент из $\{\psi_k\}$. Следовательно, число таких шаров, а значит и элементов φ_α, не более чем счетно. ■

Теорема 1 (Об ортогонализации) *Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ – линейно независимая система в евклидовом пространстве R. Тогда в R существует система элементов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *Система $\{\varphi_n\}$ ортогональная и нормированная.*
2. *Каждый элемент φ_n есть линейная комбинация элементов $f_1, f_2, \dots, f_n$: $\varphi_n = a_{n1}f_1 + \dots + a_{nn}f_n$, причем $a_{nn} \neq 0$.*
3. *Каждый элемент f_n представим в виде $f_n = b_{n1}\varphi_1 + \dots + b_{nn}\varphi_n$, причем $b_{nn} \neq 0$.*

Каждый элемент системы $\{\varphi_n\}$ определяется условиями 1) - 3) однозначно с точностью до множителя ± 1.

Доказательство. Элемент φ_1 ищется в виде $a_{11}f_1$. При этом a_{11} определяется из условия

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a_{11}^2(f_1, f_1) = 1, \text{ т. е. } a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{(f_1, f_1)}.$$

Ясно, что φ_1 определяется однозначно (с точностью до знака). Пусть $\varphi_k (k < n)$, удовлетворяющие условиям 1) - 3), уже построены. Тогда f_n можно предстваить в виде

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \dots + b_{n,n-1}\varphi_{n-1} + h_n, \text{ где } (h_k, \varphi_k) = 0 \text{ при } k < n.$$

Действительно, соответствующие коэффициенты b_{nk}, а значит и h_n, однозначно определяются из условий

$$0 = (h_n, \varphi_k) = (f_n - b_{n1}\varphi_1 + \dots + b_{n,n-1}\varphi_{n-1}, \varphi_k) = (f_n, \varphi_k) - b_{nk}(\varphi_k, \varphi_k).$$

Очевидно, что $(h_n, h_n) > 0$ (предположение $(h_n, h_n) = 0$ противоречило бы линейной независимости системы $f_1, f_2, \dots, f_n$). Положим $\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}}$.

Из индуктивного построения ясно, что h_n, а значит и φ_n, выражаются через векторы $f_1, f_2, \dots, f_n$, т. е. $\varphi_n = a_{n1}f_1 + \dots + a_{nn}f_n$, где $a_n = \frac{1}{\sqrt{(h_n, h_n)}} \neq 0$. Кроме того, $(\varphi_n, \varphi_n) = 1$, $(\varphi_n, \varphi_k) = 0$ при $k < n$ и $f_n = b_{n1}\varphi_1 + \dots + b_{nn}\varphi_n$, где $b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0$. Т. е. φ_n удовлетворяет условиям 1) - 3) ■

Переход от системы $\{f_n\}$ к системе $\{\varphi_n\}$ называется процессом ортогонализации. Ясно, что подпространства, порожденные этими системами, совпадают между собой. Поэтому они полны или не полны одновременно.

Следствие 1 *В сепарабельном евклидовом пространстве R существует ортогональный нормированный базис.*

Доказательство. Действительно, пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ – счетное всюду плотное множество в R. Выберем из него полную линейно независимую систему векторов $\{f_n\}$. Для этого из $\{\psi_n\}$ достаточно исключить все те элементы ψ_k, которые можно представить как линейную комбинацию ψ_i с номерами $i < k$.

Применив к полученной полной системе процесс ортогонализации, мы построим ортогональный нормированный базис. ■

Лекция 2 (13 января 2017)

§1. Неравенство Бесселя. Замкнутые ортогональные системы

Выбрав в n-мерном евклидовом пространстве ортогональный нормированный базис

$$e_1, e_2, \dots, e_n,$$

каждый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ можно записать в виде

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \text{ где } c_k = (x, e_k). \tag{1}$$

Выясним, как можно обобщить разложение (1) на случай вещественных бесконечномерных пространств.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ – ортогональная нормированная система в пространстве R, $f \in R$ – произвльный элемент. Сопоставим элементу f последовательность чисел

$$c_k = (f, \varphi_k), \; k = 1, 2, \dots,$$

которые будем называть координатами или коэффициентами Фурье элемента f по системе $\{\varphi_k\}$, и ряд (пока формальный)

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \tag{2}$$

который мы будем называть рядом Фурье элемента f по системе $\{\varphi_k\}$.

Возникает вопрос: сходится ли ряд (2), т. е. стремится ли последовательность ее частичных сумм (в смысле метрики R) к какому-нибудь пределу, и если сходится, то совпадает ли его сумма с исходным элементом f?

Предварительная задача: по заданному $n \in \mathbb{N}$ подобрать коэффициенты α_k ($k = 1, \dots, n$) так, чтобы расстояние между f_n и суммой

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \tag{3}$$

было минимальным.

Вычислим это расстояние. Поскольку система $\{\varphi_k\}$ ортогональна и нормирована, то

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|^2 &= (f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k) = (f, f) - 2(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k) + (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k) \\ &= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2. \end{aligned}$$

Здесь $\|f\|^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2$ – фиксированные числа. Поэтому минимум этого выражения достигается, когда последняя сумма равна нулю, т. е. при $\alpha_k = c_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 . \tag{4}$$

Мы показали, что среди всех сумм вида (3) при данном n наименее уклоняется от f частичная сумма ряда Фурье элемента f. Геометрически это означает, что длина перпендикуляра, опущенного из данной точки f на гиперплоскость, порожденную векторами φ_k, $k = 1, \ldots, n$, меньше чем длина любой наклонной, проведенной из этой же точки.

Поскольку всегда $\|f - S_n\|^2 \geq 0$, то из полученного тождества следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Здесь n произвольно, а правая часть не зависит от n. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится и его сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Это неравенство называется неравенством Бесселя.

Геометрически: сумма квадратов проекций вектора f на взаимно перпендикулярные направления не превосходит квадрата длины самого вектора f.

Определение 1 *Ортогональная нормированная система $\{\varphi_k\}$ называется замкнутой, если $\forall f \in R$ справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2,$$

которое называется равенством Парсеваля.

Из тождества (4) следует, что замкнутость системы $\{\varphi_k\}$ равносильна тому, что для каждого $f \in R$ частичные суммы ряда Фурье $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ сходятся к f.

Установим связь понятия замкнутости с введенным ранее понятием полноты ортонормированной системы.

Теорема 1 *В сепарабельном евклидовом пространстве R всякая полная ортогональная нормированная система является замкнутой и наоборот.*

Доказательство. Пусть система $\{\varphi_n\}$ замкнута, тогда для любого $f \in R$ последовательность частичных сумм его ряда Фурье сходится к f. Это означает, что линейные комбинации элементов системы $\{\varphi_n\}$ всюду плотны в R, т. е. эта система полна.

Обратно, пусть система полна, т. е. любой элемент $f \in R$ можно сколь угодно точно аппроксимировать линейной комбинацией $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$. Как мы установили, линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ (частичная сумма ряда Фурье) дает самую точную аппроксимацию. Следовательно ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ сходится к f и равенство Парсеваля имеет место. ■

На прошлой лекции мы доказали существование полных ортогональных нормированных систем в сепарабельном евклидовом пространстве. Следовательно, установили существование и замкнутых систем.

Утверждение 1 *Если система $\{\varphi_n\}$ замкнута в R, то справедливо равенство Парсеваля для скалярного произведения: для любых векторов f и g из R*

$$(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k, \text{ где } a_k = (f, \varphi_k),\ b_k = (g, \varphi_k).$$

Доказательство. Заметим, что в любом евклидовом пространстве

$$(f,g) = \frac{1}{2}\Big[\|f+g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2\Big].$$

Коэффициентами Фурье вектора $f+g$ являются числа $a_k + b_k$. Следовательно, по равенству Парсеваля

$$(f,g) = \frac{1}{2}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\Big] = \frac{1}{2}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^2 - a_k^2 - b_k^2\Big] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot b_k.$$

■

Мы рассматривали ортогональные нормированные системы. Однако можно переформулировать понятие коэффициентов Фурье, ряда Фурье и т. д. и для любой ортогональной системы. Пусть $\{\varphi_k\}$ – произвольная ортогональная система. По ней можно построить нормированную систему, состоящую из элементов $\psi_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$. Для любого $f \in R$ имеем:

$$c_n = (f, \psi_n) = \frac{1}{\|\varphi_n\|}(f, \varphi_n)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$$

где $a_n = \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$, т. е. $c_n = a_n \cdot \|\varphi_n\|$.

Коэффициент a_k называется коэффициентом Фурье элемента f по ортогональной системе $\{\varphi_n\}$. Тогда, например, неравенство Бесселя примет следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 \cdot a_n^2 \le \|f\|^2.$$

§2. Полные евклидовы пространства. Теорема Рисса-Фишера

Будем предполагать, что рассматриваемые сепарабельные пространства являются полными.

Пусть $\{\varphi_n\}$ – некоторая ортогональная нормированная система в R (не обязательно полная). Из неравенства Бесселя вытекает, что для того, чтобы числа $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ служили коэффициентами Фурье какого-то элемента $f \in R$, необходимо чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходился.

Оказывается, что в полном евклидовом пространстве это условие является и достаточным.

Теорема 2 (Рисс-Фишер) *Пусть $\{\varphi_n\}$ – произвольная ортогональная нормированная система в полном евклидовом пространстве R, и пусть числа $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ таковы, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty.$$

Тогда существует единственный элемент f, что

$$c_k = (f, \varphi_k), \ k = 1, \ldots, n, \ldots \ \text{и} \ \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_k^2\right| = (f, f) = \|f\|^2.$$

Доказательство. Положим

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k.$$

Тогда

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1} \cdot \varphi_{n+1} + \cdots + c_{n+p} \cdot \varphi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2.$$

Отсюда, исходя из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ заключаем, что последовательность $\{f_n\}$ является фундаментальной, т. е. в силу полноты пространства R она сходится к некоторому элементу $f \in R$. Далее найдем коэффициенты Фурье для f. Имеем:

$$(f, \varphi_k) = (f_n, \varphi_k) + (f - f_n, \varphi_k).$$

При этом справа первое слагаемое при $k \leq n$ равно c_k, а второе стремится к нулю, т. к.

$$|(f - f_n, \varphi_k)| \leq \|f - f_n\| \cdot \|\varphi_k\| \leq \|f - f_n\| \to 0 \ (n \to \infty).$$

Левая часть от n не зависит, поэтому получаем

$$(f, \varphi_k) = c_k.$$

Так как по построению $\|f - f_n\| \to 0$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f).$$

Действительно,

$$(f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k) = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to 0.$$

Единственность такого f вытекает из того, что если $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)^2$, то $\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$ сходятся к f в норме R, а предел всегда единственен. ■

Докажем следующую полезную теорему:

Теорема 3 *Для того чтобы ортогональная нормированная система $\{\varphi_n\}$ в полном сепарабельном евклидовом пространстве была полна, необходимо и достаточно, чтобы в R не существовало ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы $\{\varphi_n\}$.*

Доказательство. Пусть система$\{\varphi_n\}$ полна и, следовательно, замкнута. Если f ортогонален всем элементам $\{\varphi_n\}$, то все его коэффициенты Фурье равны нулю. Тогда из равенства Парсеваля получаем:

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0,$$

т. е. $f = 0$.

Обратно, пусть система $\{\varphi_n\}$ не полна. Тогда эта система не замкнута, и в R существует такой элемент $g \neq 0$, что

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \text{ где } c_k = (g, \varphi_k).$$

На основании теоремы Риса-Фишера существует такой элемент $f \in R$, что

$$(f, \varphi_k) = c_k, \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2.$$

Но тогда элемент $f - g$ ортогонален φ_k $\forall k \in \mathbb{N}$, а из неравенства

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) < (g, g)$$

следует, что $f \neq g$, т. е. $f - g \neq 0$ ■

Утверждение 2 *Если система $\{\varphi_n\}$ замкнута в R, то любой элемент $f \in R$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.*

Доказательство. Действительно, если f и g имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то у $f - g$ все коэффициенты Фурье равны нулю и по равенству Парсеваля $\|f - g\|^2 = 0$. ■

Лекция 3 (17 января 2017)

Продолжим рассмотрение полных евклидовых пространств. Нас будут интересовать бесконечномерные пространства. Будем, как правило, предполагать наличие счетного всюду плотного множества.

§1. Гильбертово пространство. Теорема об изоморфизме

Определение 1 *Полное евклидово пространство бесконечного числа измерений называется гильбертовым пространством.*

Еще раз сформулируем аксиомы гильбертова пространства H с элементами $f, g, \dots$

I. H есть линейное пространство с заданным на нём скалярным произведением (евклидово пространство).

II. Пространство H полно в смысле метрики

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

III. Пространство H бесконечномерно, т.е. в нем $\forall n \in \mathbb{N}$ можно найти n линейно независимых векторов.

Чаще всего рассматриваются сепарабельные гильбертовы пространства, которые удовлетворяют еще одной аксиоме.

IV. H сепарабельно, т.е. в нём существует счётное всюду плотное множество.

Примером сепарабельного гильбертова пространства является пространство l_2. Будем рассматривать только сепарабельные гильбертовы пространства.

Два евклидовых пространства, R и R^*, называются изоморфными, если между их элементами можно можно установить взаимно однозначные соответствия так, что если

$$x \leftrightarrow x^*, y \leftrightarrow y^*, x, y \in R, x^*, y^* \in R^*$$

то

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*, \lambda x \leftrightarrow \lambda x^* \text{ и } (x, y) = (x^*, y^*),$$

т.е. изоморфизм сохраняет как линейные операции, определенные в этих пространствах, так и скалярное произведение.

Как известно, любые два n-мерных евклидовых пространства изоморфны между собой и каждое такое пространство изоморфно $\mathbb{R}^n$.

Евклидовы пространства бесконечной размерности не обязательно изоморфны. Например, пространства l_2 и $C_2[a, b]$ не изоморфны, т.к. первое – полно, а второе нет. Однако имеет место следующий факт.

Теорема 1 *Любые два сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

Доказательство. Покажем, что каждое сепарабельное гильбертово пространство изоморфно l_2. Тем самым будет доказана теорема. Выберем в H произвольную полную ортогональную нормированную систему $\{\varphi_n\}$ и поставим в соответствие элементу $f \in H$ совокупность его коэффициентов Фурье $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ по системе $\{\varphi_n\}$. Поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, то $\{c_k\}$ принадлежит l_2. Обратно, по теореме Рисса-Фишера всякому элементу $(c_1, c_2, \ldots)$ из l_2 отвечает некоторый элемент $f \in$ H, имеющий числа $\{c_k\}$ своими коэффициентами Фурье. Установленное соответствие, очевидно, взаимно однозначно. Далее: Если $f \leftrightarrow (c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$, $g \leftrightarrow (d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$, то $f + g \leftrightarrow (c_1 + d_1, \ldots, c_n + d_n, \ldots)$, $\lambda f \leftrightarrow (\lambda c_1, \ldots, \lambda c_n, \ldots)$, т.е. сумма переходит в сумму и т.д. линейность.

Из равенства Парсеваля следует, что

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot d_k.$$

В самом деле: $(f, f) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$; $(g, g) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k^2$ и $(f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (c_k + d_k)^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 + 2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \cdot d_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k^2$. ■

Доказанная теорема означает, что с точностью до изоморфизма существует лишь одно сепарабельное гильбертово пространство, а пространство l_2 можно рассматривать как его “координатную реализацию”. (подобно $\mathbb{R}^n$ для конечномерных евклидовых пространств).

Другую реализацию можно получить, взяв евклидово пространство $C_2[a, b]$ и рассмотрев его пополнение. Пополнение можно сделать для любого метрического пространства. На полученном пространстве можно определить линейные операции и скалярное произведение по непрерывности, полагая

$$x + y = \lim_{n \to \infty} (x_n + y_n), \lambda x = \lim_{n \to \infty} \lambda x_n$$

и

$$(x, y) = \lim_{n \to \infty} (x_n, y_n), \text{ где } x_n \to x, y_n \to y \text{ в } C_2[a, b].$$

Существование этих пределов и независимость их от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ легко устанавливаются. Тогда полученное пространство будет полным евклидовым пространством, очевидно, бесконечномерным и сепарабельным. На самом деле, получится пространство $L_2[a, b]$, которое получалось в прошлом семестре.

§2. Подпространства, ортогональные дополнения. Прямая сумма

Определение 2 *Линейным многообразием в гильбертовом пространстве H называется совокупность L элементов из H, что если $f, g \in L$, то $\alpha f + \beta g \in L$ для $\forall \alpha, \beta$. Замкнутое линейное многообразие называется подпространством.*

Приведем примеры подпространств.

Пример 1 *Пусть h произвольный элемент из H. Совокупность всех элементов, которые ортогональны h, образует подпространство в H.*

Пример 2 *Пусть H реализовано как ℓ_2, то есть его элементы $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, где $\sum\limits_k x_k^2 < \infty$. Элементы, подчиненные условию $x_1 = 0$ образуют подпространство ℓ_2.*

Пример 3 *Опять $H = \ell_2$. Пусть $L = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\}$, для которых $x_n = 0$ при n = 2, 4, 6, ... и x_n произвольно при n = 1, 3, 5, ... Это подпространство.*

Приведите пример <u>незамкнутого линейного многообразия</u> в ℓ_2.

Всякое подпространство гильбертова пространства либо является конечномерным евклидовым пространством, либо само представляет собой гильбертово пространство. Действительно, справедливость аксиом **I** – **III** для каждого такого подпространства очевидна, а аксиома **IV** вытекает из следующей леммы.

Лемма 1 *Любое подмножество R' сепарабельного метрического пространства R само сепарабельно.*

Доказательство. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – счётное всюду плотное множество в R и $a_n = \inf\limits_{\eta \in R} \rho(\xi_n, \eta)$. Для любых натуральных n и m найдется точка $\eta_{n,m} \in R'$, что

$$\rho(\xi_n, \eta_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$. Для любого $\eta \in R'$ найдётся такое n, что $\rho(\varepsilon_n, \eta) < \frac{\varepsilon}{3}$ и, следовательно, $\rho(\eta_n, \eta_{n,m}) < a_n + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$. Но тогда $\rho(\eta, \eta_{n,m}) < \varepsilon$, т.е. не более чем счётное множество $\{\eta_{n,m}\}$ $(n, m = 1, 2, 3, \ldots)$ всюду плотно в R'. ■

Применив процесс ортогонализации к какой-либо счётной всюду плотной последовательности элементов произвольного подпространства гильбертова пространства, получаем следующую теорему.

Теорема 2 *В каждом подпространстве M пространства H содержится ортонормированная система $\{\varphi_n\}$, линейные замыкания которой совпадает с M.*

Пусть M - подпространство H. Обозначим через

$$M^\perp = H \ominus M$$

множество элементов $g \in H$, ортогональных ко всем элементам $f \in M$ и докажем, что $M^\perp$ есть подпространство пространства H. Линейность $M^\perp$ очевидна, т.к. из $(g_1, f) = (g_2, f) = 0$ вытекает $(\alpha g_1 + \beta g_2, f) = 0$. Для доказательства замкнутости допустим, что $g_n \in M^\perp$ и последовательность $\{g_n\}$ сходится к g. Тогда для любого $f \in M$

$$(g, f) = \lim_{n \to \infty} (g_n, f) = 0, \text{ т.е. } g \in M^\perp.$$

Подпространство $M^\perp$ называется <u>ортогональным дополнением</u> подпространства M.

Заметим, что $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Теорема 3 *Если M (замкнутое) подпространство пространства H, то любой элемент $f \in H$ единственным образом представим в виде $f = h + h^\perp$, где $h \in M, h^\perp \in M^\perp$.*

Доказательство. Докажем существование такого разложения. Для этого найдем в M полную ортогональную систему $\{\varphi_n\}$ и положим

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \varphi_n, \text{где } c_n = (f, \varphi_n).$$

Так как ряд $\sum c_n^2$ сходится (по неравенству Бесселя), то элемент h существует и принадлежит M.

Положим $h' = f - h$.

Очевидно, что для всех n выполнено $(h', \varphi_n) = c_n - c_n = 0$ и, поскольку произвольный элемент $\xi \in M$ представим в виде $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$, имеем

$$(h', \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (h', \varphi_n) = 0. \text{ т.е. } h' \in M^{\perp}.$$

Допустим, что кроме построенного разложения $f = h + h'$ существует другое разложение $f = h_1 + h_1, h_1 \in M, h_1 \in M'$. Тогда

$$h + h' = h_1 + h_1' \Rightarrow h - h_1 = h_1' - h' = 0, \text{ т.к. } M \cap M^{\perp} = \{0\}.$$

■

Сформулируем ряд полезных следствий из доказанной теоремы.

Следствие 1 *Ортогональное дополнение к ортогональному дополнению M совпадает с самим M.*

Значит, можно говорить о взаимно дополнительных подпространствах пространства H. Если $\{\varphi_n\}$ и $\{\varphi_n'\}$ – полные ортогональные системы в M и $M^{\perp}$, соответственно, то объединяя эти системы, получаем полную ортогональную систему в H. В частности, справедливо

Следствие 2 *Каждая ортогональная нормированная система может быть расширено до системы, полной в H.*

Если система $\{\varphi_n\}$ конечна, то число её элементов равна размерности подпространства M, порожденного $\{\varphi_n\}$ и равна коразмерности подпространства $M^{\perp}$. Еще одно

Следствие 3 *Ортогональное дополнение к подпространству конечной размерности n имеет конечную коразмерность n, и наоборот.*

Если каждый вектор $f \in H$ представим в виде $f = h + h^{\perp}$, где $h \in M, h^{\perp} \in M^{\perp}$, то говорят, что H есть прямая сумма взаимно ортогональных подпространств M и $M^{\perp}$ и пишут

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Ясно, что понятие прямой суммы обобщается на любое конечное или счётное число подпространств, именно, говорят, что H есть прямая сумма подпространств $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$

$$H = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus \cdots$$

если
1) подпространства M_i попарно ортогональны, т.е. любой вектор из M_i ортогонален любому вектору из M_j при $i \neq j$.

2) Каждый элемент $f \in H$ может быть представлен в виде

$$f = h_1 + h_2 + \ldots + h_n + \ldots, \text{ где } h_n \in M_n,$$

причем, если число подпространств M_n бесконечно, то ряд $\sum \|h_n\|^2$ сходится. Легко проверить, что такое представление единственно и

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2.$$

Наряду с прямой суммой подпространств можно говорить о прямой сумме конечного или счётного числа произвольных гильбертовых пространств. Именно, если H_1 и H_2 два гильбертовых пространства, то их прямая сумма – это произвольные пары $(h_1, h_2), h_1 \in H_1, h_2 in H_2$, а скалярное произведение в $H_1 \oplus H_2$ равно

$$((h_1, h_2), (h_1', h_2')) = (h_1, h_1') + (h_2, h_2').$$

В пространстве $H = H_1 \oplus H_2$ содержатся, очевидно, взаимно ортогональные подпространства, состоящие из пар вида $(h_1, 0)$ и $(0, h_2)$ соответственно. Первые из них, очевидно, отождествляется с H_1, а второе с H_2.

Аналогично определяется сумма $H = \sum \oplus H_n$ конечного или счётного набора гильбертовых пространств.

Лекция 4 (24 января 2017)

§1. Комплексные евклидовы пространства

Наряду с действительным можно ввести и комплексное евклидово пространство (т.е. комплексное линейное пространство со скалярным произведением в нем). Однако сформулированные аксиомы не могут быть одновременно выполненными. Действительно,

$$\text{если } (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 (x, x), \text{ то при } \lambda = i, \quad (ix, ix) = (-1)(x, x),$$

т.е. квадраты векторов x и ix не могут быть одновременно положительными. Поэтому необходимо подправить аксиомы:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$
4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Тогда из 1) и 2) $\Rightarrow (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, y)$.

Пример 1 *Пространство $\mathbb{C}^n$, в котором скалярное произведение любых двух элементов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (x_1, y_2, \ldots, y_n)$ определено формулой*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Как известно, всякое комплексное евклидово пространство размерности n изоморфно пространству $\mathbb{C}^n$.

Примеры бесконечномерных комплексных евклидовых пространств.

Пример 2 *Комплексное пространство ℓ^2, состоящее из элементов $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ где $x_n \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^2 < +\infty$, а скалярное произведение определяется формулой*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Пример 3 *Пространство $C_2[a, b]$ комплекснозначных непрерывных функций на $[a, b]$ со скалярным произведением*

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

В комплексном евклидовом пространстве длина (норма) вектора определяется, как и в действительном случае, по формуле:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Понятие угла между векторами в комплексном пространстве не вводят, т.к. $\frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ – комплексное число, однако, понятие ортогональности сохраняется: векторы x, y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$.

Если $\{\phi_n\}$ – ортонормированная система в комплексном евклидовом пространстве R, $f \in R$, то как и в действительном случае, числа $a_n = (f, \phi_n)$ называются коэффициентами Фурье, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \phi_n$ – рядом Фурье f по ортонормированной системе $\{\phi_n\}$. Имеется неравенство Бесселя: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq \|f\|^2$.

Аналогично вещественному евклидову пространству вводится понятие полной ортонормированной системы, ортогонального базиса и замкнутой ортонормированной системы. В частности, равенство Парсеваля для нормы имеет вид:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \quad c_k = (f, \phi_k),$$

а для комплексного скалярного произведения справедливо тождество

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}, \quad d_k = (g, \phi_k).$$

Справедлив также комплексный вариант теоремы Рисса-Фишера и следствия из нее.

Полное комплексное евклидово пространство бесконечной размерности называется комплексным гильбертовым пространством.

На комплексный случай переносится теорема об изоморфизме:

Теорема 1 *Все сепарабельные комплексные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

Предлагается убедиться в том, что все доказанные нами теоремы для вещественных евклидовых пространств справедливы (с незначительными изменениями) и для комплексных евклидовых пространств.

§2. Пространство L_2

Пусть X – некоторое пространство с мерой μ (т.е. задана тройка (X, Σ, μ), где Σ – это сигма-алгебра подмножеств X, а μ – сигма-аддитивная мера на Σ). Мера пространства X может быть конечной или сигма-конечной. Будем считать меру μ полной (т.е. любое подмножество множества меры нуль является измеримым).

Построим новое евклидово пространство, взяв совокупность функций с интегрируемым квадратом. Будем сперва рассматривать действительные функции f, заданные на множестве X. Все функции предполагаются измеримыми и определенными на X почти всюду. Эквивалентные между собой функции не различаются.

Определение 1 *Функция f называется функцией с интегрируемым квадратом на X, если интеграл $\int_X f^2(x) d\mu$ существует (конечен).*

Совокупность всех таких функций мы будем обозначать $L_2(X, \mu)$ или короче L_2.

Установим основные свойства функций с интегрируемым квадратом.

1. Произведение двух функций с интегрируемым квадратом есть интегрируемая функция. Это вытекает из неравенства $|f(x) \cdot g(x)| \leq \frac{1}{2}[f^2(x) + g^2(x)]$ и свойств интеграла Лебега.

Следствие 1 *Всякая функция с интегрируемым квадратом в пространстве конечной меры, интегрируется.*

Достаточно рассмотреть функцию $g(x) \equiv 1$ и воспользоваться свойством 1.

2. Сумма двух функций из L_2 также принадлежит L_2. Действительно:

$$(f(x) + g(x))^2 \leq f^2(x) + 2|f(x) \cdot g(x)| + g^2(x).$$

Каждая из трех функций справа – интегрируема по свойству 1.

3. Если $f \in L_2, \alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha \cdot f \in \mathbb{R}$. Очевидно, из свойств 2, 3 заключаем, что L_2 это линейное пространство.

Определим в L_2 скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int_X f(x)g(x)d\mu. \tag{1}$$

Ясно, что все аксиомы скалярного произведения выполнены, а именно:

1) $(f, g) = (g, f)$,
2) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$,
3) $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$,
4) $(f, f) > 0$ если $f \neq 0$.

Мы не различаем эквивалентные функции, т.е., разность которых почти всюду равна нулю. За нулевой элемент в пространстве L_2 принимается класс всех функций, которые почти всюду равны нулю.

Определение 2 *Евклидовым пространством L_2 называется линейное пространство, состоящее из классов эквивалентности между собой функций с интегрируемым квадратом, в котором скалярное произведение задается формулой формулой (1).*

В L_2, как и в любом евклидовом пространстве выполнено неравенство Коши-Буняковского:

$$\left(\int_X f(x)g(x)d\mu\right)^2 \leq \left(\int_X f^2(x)d\mu\right) \cdot \left(\int_X g^2(x)d\mu\right)$$

и неравенство треугольника:

$$\left(\int_X (f(x) + g(x))d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_X f^2(x)d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_X g^2(x)d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В частности, при $\mu(X) < \infty, g(x) \equiv 1$

$$\left(\int_X f(x)d\mu\right)^2 \leq \mu(X) \cdot \int_X f^2(x)d\mu. \tag{2}$$

Норма в L_2 задается формулой:

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_X f^2(x)d\mu\right)^{\frac{1}{2}},$$

а расстояние между элементами f и g равно

$$\rho(f,g) = \|f-g\| = \left(\int_X (f(x)-g(x))^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Величину $\int (f(x)-g(x))^2\, d\mu = \|f-g\|^2$ называют среднеквадратичным уклонением функций f и g друг от друга.

Сходимость в смысле метрики пространства L_2 называется сходимостью в среднем квадратичном.

Теорема 2 *Пространство $L_2(X,\mu)$ при $\mu(X)<\infty$ полное.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ – фундаментальна последовательность в L_2, т.е.

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \text{ при } n,m\to\infty.$$

Тогда в сиду неравенства (2)

$$\int_X [f_n(x)-f_m(x)]\, d\mu \le [\mu(X)]^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int_X (f_n(x)-f_m(x))^2 d\mu\right\}^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon \cdot \mu(X)^{\frac{1}{2}},$$

т.е., последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна и в метрике пространства $L_1(X,\mu)$ суммируемых функций. Но это пространство полное, поэтому $\{f_n\}$ сходится к некоторой суммируемой функции f в метрике пространства $L_1(X,\mu)$. Выберем из $\{f_n\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходящуюся почти всюду к функции f. В неравенстве

$$\int_X (f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x))^2 d\mu < \varepsilon,$$

справедливом для членов этой подпоследовательности, можно, используя теорему Фату, перейти к пределу при $l\to\infty$:

$$\int_X (f_{n_k}(x) - f(x))^2 d\mu \le \varepsilon$$

откуда следует, что $f\in L_2$ и f_{n_k} сходится к f по норме пространства $L_2(X,\mu)$, а если фундаментальная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, то она сама сходится. ■

Случай бесконечной меры: мы существенно использовали факт, что $\mu(X)<\infty$. Если $\mu(X)=\infty$, то $f\in L_2 \not\Rightarrow f\in L_1$.

Пример: функция $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ интегрируема с квадратом на $X=\mathbb{R}$, но не интегрируема.

Кроме того, из сходимости в L_2 не следует сходимость в L_1.

Пример: $\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ при } |x|\le n \\ 0 \text{ при } |x|>n \end{cases}$ сходятся к 0 в $L_2(\mathbb{R})$, но не имеют предела в $L_1(\mathbb{R})$.

Однако теорема о полноте верна и в случае бесконечной меры.

Итак, $L_2(X,\mu)$ является полным евклидовым пространством, которое бесконечномерно (за исключением вырожденных случаев). Значит, это гильбертово пространство.

Определение 3 *Мера μ называется мерой с конечным базисом, если существует счетная система $\mathcal{A} = \{A_n\}$ измеримых подмножеств X (счетный базис), что для любого $\varepsilon > 0$ и для всякого измеримого множества $M \subset X$ найдется такое $A_n \in \mathcal{A}$, что $\mu(M \triangle A_n) < \varepsilon$.*

Мера Лебега, очевидно, имеет счетный базис. Прямое произведение $\mu_1 \bigotimes \mu_2$ двух мер со счетным базисом также обладает счетным базисом. Надо рассмотреть всевозможные попарный произведения элементов из обоих базисов. Следовательно, мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ имеет счетный базис.

Следующие теоремы сформулируем без доказательств (см. учебник Колмогоров, Фомин).

Теорема 3 *Если мера μ имеет счетный базис, то в пространстве $L_1(X, \mu)$ существует счетное всюду плотное множество.*

Теорема 4 *Если мера μ имеет счётный базис, то $L_2(X, \mu)$ есть сепарабельное гильбертово пространство. В частности, $L_2(X, \mu)$ изоморфно ℓ_2.*

§3. Комплексное пространство L_2

Мы рассмотрели действительное пространство L_2. Изложенные результаты легко переносятся на комплексный случай. Комплексная функция $f(x)$ определенная на некотором множестве X с заданной на нём мерой μ, называется функцией с интегрируемым квадратом, если интеграл $\int\limits_X |f(x)|^2 d\mu$ конечен (по Лебегу).

Определив сложение таких функций и умножение их на числа обычным образом, а также введя скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu$$

мы получим комплексное евклидово пространство, называемое комплексным L_2 (при этом, как и в действительном случае, рассматриваем классы эквивалентности функций).

Лекция 5 (27 января 2017)

Различные виды сходимости и связь между ними

Сходимость в пространстве L_2 мы определили, введя норму: $f_n \to f$ если

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X \big(f_n(x) - f(x)\big)^2 d\mu = 0.$$

Такая сходимость называется сходимостью в среднем квадратичном. Посмотрим, как эта сходимость связана с другими типами сходимости функциональных последовательностей. Предположим сначала, что мера пространства X конечна: $\mu(X) < \infty$.

1. Если последовательность $\{f_n\}$ функций из $L_2(X,\mu)$ сходится в метрике $L_2(X,\mu)$, то она сходится и в метрике $L_1(X,\mu)$.

Действительно, на прошлой лекции мы доказали неравенство

$$\int\limits_X |f_n(x) - f(x)|\, d\mu \leq \Big[\mu(X) \int\limits_X |f_n(x) - f(x)|^2\, d\mu\Big]^{\frac{1}{2}}$$

из которого и следует это утверждение.

2. Если последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно, то она сходится и в среднем квадратичном.

Действительно, при каждом $\varepsilon > 0$ и при всех $n \geq N(\varepsilon)$ имеем $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$. Следовательно,

$$\int\limits_X |f_n(x) - f(x)|^2\, d\mu \leq \varepsilon^2 \mu(X),$$

откуда и вытекает наше утверждение.

Напомним определение сходимости по мере:

Определение 1 *Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере μ к функции $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\,\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\,\big) = 0$$

В этом определении предполагается, что $f_n(x)$ и $f(x)$ – измеримые функции.

3. Если последовательность суммируемых функций сходится в среднем, то она сходится на X и по мере (эта утверждение справедливо и при $\mu(X) = \infty$)

Для доказательства воспользуемся неравенством Чебышева. Пусть $A \in \Sigma$, φ – суммируемая на A функция. Тогда

$$\mu\big(\,\{x : x \in A, |\varphi(x)| \geq c\}\,\big) \leq \frac{1}{c} \cdot \int\limits_A |\varphi(x)|\, d\mu.$$

Действительно, пусть $A' = \{x : x \in A, |\varphi(x)| \geq c\} \subset A$. Тогда

$$\int\limits_A |\varphi(x)|\, d\mu = \int\limits_{A'} |\varphi(x)|\, d\mu + \int\limits_{A\setminus A'} |\varphi(x)|\, d\mu \geq \int\limits_{A'} |\varphi(x)|\, d\mu \geq c \cdot \mu(A').$$

Применим неравенство Чебышова для доказательства нашего утверждения:

$$\mu\big(\,\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\,\big) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int\limits_X |f_n(x) - f(x)|\, d\mu.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$.

Установим связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду.

4. Если последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится почти всюду к f, то она сходится к этой функции и по мере (здесь обязательно $\mu(X) < \infty$).

Доказательство. Как известно, предел почти всюду измеримых функций является измеримой функцией, т. е. функция $f(x)$ измерима. Пусть A – это то множество (нулевой меры), на котором $f_n(x)$ не стремится к $f(x)$.

Обозначим множества:

$$E_k(\varepsilon) = \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$R_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon),$$

$$M(\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\varepsilon).$$

Ясно, что все эти множества измеримы. Так как $R_1(\varepsilon) \supset R_2(\varepsilon) \supset \ldots$, то в силу свойства непрерывности меры (при $\mu(X) < \infty$)

$$\mu\big(R_n(\varepsilon)\big) \to \mu\big(M(\varepsilon)\big) \text{ при } n \to \infty. \tag{1}$$

Проверим теперь, что $M \subset A$. Действительно, если $x_0 \notin A$, т. е. $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, то для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое n_1, что

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \;\forall k \geq n_1,$$

т. е. $x_0 \notin R_{n_1}(\varepsilon)$ и, тем более, $x \notin M(\varepsilon)$.

Но $\mu(A) = 0$, значит и $\mu\big(M(\varepsilon)\big) = 0$. Воспользовавшись (1) заключаем, что $\mu\big(R_n(\varepsilon)\big) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Осталось заметить, что $E_n(\varepsilon) \subset R_n(\varepsilon)$, значит и $\mu\big(E_n(\varepsilon)\big) \to 0$ $(n \to \infty)$, что и требовалось доказать ■

Нетрудно убедиться, что из сходимости по мере не следует, вообще говоря, сходимость почти всюду. Действительно, для каждого натурального k определим функции $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}$ на полуинтервале $(0, 1]$:

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \frac{i-1}{k} < x \leq \frac{i}{k}, \\ 0, & \text{при всех остальных } x. \end{cases}$$

Занумеровав эти функции подряд: $f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_1^{(3)}, \ldots,$ мы получим последовательность, которая сходится по мере к нулю, но не сходится ни в одной точке $(0, 1]$.

Несмотря на этот пример, имеется теорема:

Теорема 1 *Пусть последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$ сходится по мере к $f(x)$. Тогда можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, которая сходится к $f(x)$ почти всюду (эта теорема выполнена и при $\mu(X) = \infty$).*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ – некоторая последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю: $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Пусть положительные числа $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ таковы, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$ сходится.

Построим последовательность индексов $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ следующим образом: выберем n_1 так, чтобы выполнялось

$$\mu\big(\{x : |f_{n_1}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_1\}\big) < \eta_1$$

(такое η_1 обязательно найдется в силу сходимости по мере); далее выберем $n_2 > n_1$ так, чтобы выполнялось

$$\mu\big(\{x : |f_{n_2}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_2\}\big) < \eta_2$$

и так далее. На очередном шаге выберем $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы выполнялось

$$\mu\big(\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}\big) < \eta_k.$$

Покажем, что построенная последовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится к f почти всюду. Действительно, пусть

$$R_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\},$$

$$Q = \bigcap_{m=1}^{\infty} R_m.$$

Заметим, что $\mu(Q) < \infty$. Поскольку $R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_n \supset \dots$, то в силу непрерывности меры, $\mu(R_m) \to \mu(Q)$. С другой стороны, ясно, что

$$\mu(R_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \eta_k \to 0 \ (m \to \infty).$$

Следовательно, $\mu(R_m) \to 0$ и $\mu(Q) = 0$.

Остается проверить, что во всех точках множества $X \setminus Q$ имеет место сходимость $f_{n_k}(x) \to f(x)$.

Пусть $x_0 \in X \setminus Q$. Тогда найдется такое m_0, что $x_0 \notin R_{m_0}$. Это означает, что для всех $k \geq m_0$ точка $x_0 \notin \{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_k\}$, т. е. $|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k$.

Последовательность $\{\varepsilon_k\}$ выбиралась стремящейся к нулю, поэтому $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = f(x_0)$ ■

Как легко видеть, из сходимости последовательности в среднем (и даже в среднем квадратичном) не вытекает, вообще говоря, ее сходимость почти всюду. Это видно из приведенного выше примера. Тем не менее, из Теоремы 1 заключаем:

5. Если последовательность $\{f_n\}$ сходится <u>в среднем</u>, то из нее можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящуюся <u>почти всюду</u>.

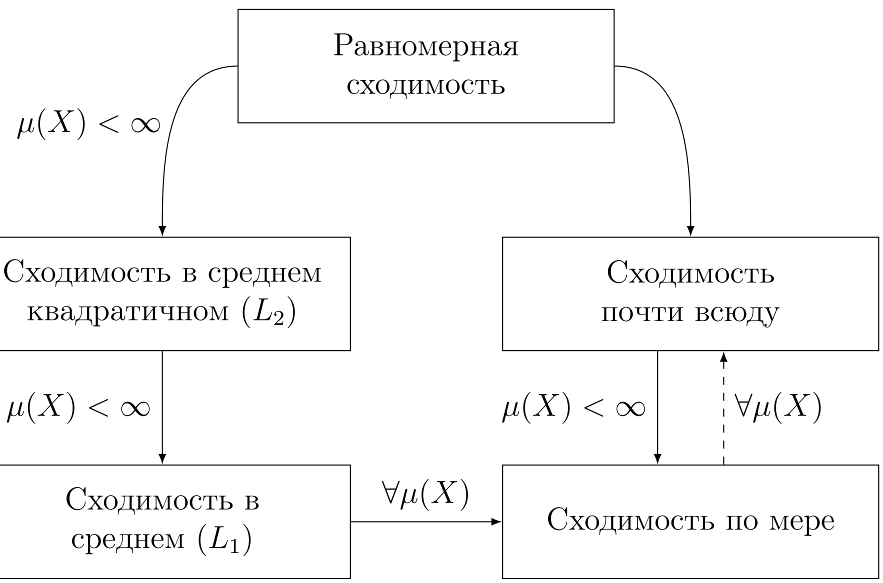
Обратное утверждение неверно. Последовательность может сходиться почти всюду (и даже всюду) и не сходиться при этом в среднем.

Пример 1

$$X = [0,1],\ \ f_n = \begin{cases} n, & x \in (0, \frac{1}{n}], \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, $f_n(x) \to 0$ при всех $x \in [0,1]$. В то же время $\int_0^1 |f_n(x)|\,dx = 1$ при всех n (и никакая подпоследовательность не сходится).

Изобразим связи между различными видами сходимости при $\mu(X) < \infty$ в виде диаграммы:



Пунктирная стрелка означает возможность выбора подпоследовательности, сходящейся почти всюду.

В случае $\mu(X) = \infty$ (например, для функций на всей прямой с мерой Лебега) некоторые из этих связей тоже имеют место, а некоторые – нет. Это отмечено на диаграмме.

Пример 2

$$X = \mathbb{R},\ \ f_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & |x| \le n, \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Такая последовательность сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к функции $f(x) = 0$, однако она не сходится ни в среднем, ни в среднем квадратичном. Далее, из сходимости в среднем квадратичном (т. е. в L_2) не следует сходимость в среднем (т. е. в L_1).

Пример 3

$$X = \mathbb{R},\ \ f_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & |x| \le n, \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Такая последовательность сходится к $f(x) = 0$ в среднем квадратичном, но не в среднем.

Заметим, что для $\mu(X) = \infty$ из сходимости в среднем следует сходимость по мере (неравенство Чебышева справедливо всегда). Кроме того, для какой-то подпоследовательности будет и сходимость почти всюду (в доказательстве Теоремы 1 не нужна конечность меры).

Наконец, заметим, что из сходимости в среднем не следует сходимость в среднем квадратичном ни при $\mu(X) < \infty$, ни, тем более, при $\mu(X) = \infty$.

Лекция 6 (31 января 2017)

Общая теорема, доказанная нами для общих евклидовых пространств, говорит о том, что в L_2 существуют полные ортогональные системы функций (и полные ортонормированные системы). Такие системы можно получить, например, применяя процесс ортогонализации.

Если в L_2 выбрана некоторая ортогональная система $\{\varphi_n\}$, то по общим правилам каждый элемент $f \in L_2$ можно представить как сумму ряда $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$ – ряда Фурье f по системе $\{\varphi_n\}$. Коэффициент Фурье c_n определяется по формуле:

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \cdot \int\limits_X f(x)\varphi_n(x)d\mu, \quad \|\varphi_n\|^2 = \int\limits_X \varphi_n^2(x)d\mu.$$

Выполнено равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2|c_n|^2 = \int_X |f(x)|^2 d\mu.$$

Рассмотрим теперь важнейшие примеры ортогональных систем в пространствах L_2 и отвечающие им разложения.

§1. Тригонометрическая система. Тригонометрический ряд Фурье

Рассмотрим пространство $L_2[-\pi,\pi]$ с обычной мерой Лебега на нем. В этом пространстве функции

$$1, \cos nx, \sin nx \ (n = 1, 2, \dots) \tag{1}$$

образуют полную ортогональную систему, которая называется тригонометрической.

Ортогональность легко проверяется непосредственным вычислением, например, при $n \neq m$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big[\cos\big((n+m)x\big) + \cos\big((n-m)x\big)\Big]dx = 0$$

и т.д. Полнота этой системы следует из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации любой непрерывной периодической функции тригонометрическими полиномами. Система не нормирована. Соответствующая нормированная система состоит из функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}; \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \ (n = 1, 2, \dots).$$

Действительно, напомним, что

$$\|1\|_{L_2}^2 = 2\pi, \quad \|\sin nx\|^2 = \|\cos nx\|^2 = \pi \quad (\text{следует из } \sin^2 nx + \cos^2 nx = 1).$$

Пусть f – функция из $L_2[-\pi,\pi]$, ее коэффициенты Фурье, отвечающие функциям $1, \cos nx, \sin nx$, принято обозначать $a_0/2, a_n, b_n$. Таким образом, по общим формулам

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \text{ т. е. } a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx; \; b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \; n = 1, 2, \ldots$$

Соответствующий ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big[a_n \cdot \cos nx + b_n \sin nx\big].$$

Для любой функции $f \in L_2$ этот ряд сходится именно к этой функции в среднем квадратичном, т. е., если обозначить

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\big[a_n \cdot \cos nx + b_n \sin nx\big]$$

частичную сумму ряда Фурье, то среднеквадратичное отклонение S_k от f вычисляется по формуле

$$\|f(x) - S_k(x)\|^2 = \|f\|^2 - \pi\Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\big[a_n^2 + b_n^2\big]\Big).$$

Среди всех тригонометрических полиномов

$$T_k(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\big[\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx\big]$$

с заданным k именно частичная сумма S_k ряда Фурье дает наилучшее приближение функции f (в метрике L_2).

Неравенство Бесселя для тригонометрической системы:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx,$$

но поскольку тригонометрическая система полна, то, на самом деле, имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Значит, для любой функции $f \in L_2$ квадраты ее коэффициентов Фурье образуют сходящийся ряд.

Обратно, если числа a_0, a_n и b_n $(n = 1, 2, \dots)$ таковы, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ сходится, то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx]$$

также сходится (в L_2) и его сумма представляет собой функцию, имеющую a_0, a_n, b_n своими коэффициентами Фурье.

Значит $S_n(x)$ сходится к $f(x)$ в L_2, а из результатов прошлой лекции получаем, что найдется подпоследовательность S_{n_k}, такая что $S_{n_k} \xrightarrow{\text{п. в.}} f(x)$ $(k \to \infty)$.

Все приведенные рассуждения легко переносятся на функции, заданные на отрезке произвольной длины, скажем, на $[-l, l]$. Если $f(t) \in L_2[-l, l]$, то заменой $x = \frac{\pi}{l} \cdot t$, т. е. $t = \frac{l}{\pi} \cdot x$, переводим $f(t)$ в функцию $f^*(x) = f(\frac{lx}{\pi})$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда

$$a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cos\left(\frac{\pi n}{l} t\right) dt, n = 0, 1, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} t\right) dt, n = 1, 2, \dots$$

Ряд Фурье для функции f, заданной на отрезке длины $2l$, имеет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} t\right)\right].$$

Выпишем также равенство Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t)^2 dt.$$

Замечание 1 *Тригонометрические ряды были использованы французским математиком Жаном Фурье в его работах по теории распространения тепла. Еще раньше формулы для коэффициентов a_n и b_n встречались у Эйлера. В дальнейшем теория тригонометрических рядов развивалась в работах Римана, Дирихле и других. Первоначально термины “ряд Фурье”, “коэффициенты Фурье” связывались именно с тригонометрической системой и лишь значительно позже в XX веке стали употребляться в общем смысле, т. е. применительно к <u>произвольной</u> ортогональной системе в <u>любом</u> евклидовом пространстве.*

Из полноты тригонометрической системы следует, что для любой $f \in L_2$ ее ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx]$$

сходится к f в среднем. Однако с точки зрения математического анализа важно знать, когда эта сходимость имеет место в других смыслах, например, в каждой точке или равномерно на всем отрезке. Об этом речь пойдет в следующих лекциях.

§2. Тригонометрическая система на $[0, \pi]$

Функции

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots \tag{2}$$

$$\sin x, \sin 2x, \dots \tag{3}$$

образуют в совокупности полную ортогональную систему на отрезке $[-\pi, \pi]$. Покажем, что каждая из двух систем (2) и (3) ортогональна и полна в $L_2[0, \pi]$.

Ортогональность проверяется прямым подсчетом. Докажем полноту системы косинусов (2). Пусть $f \in L_2[0, \pi]$. Доопределим ее на полуинтервале $[\pi, 0)$ формулой $f(-x) = f(x)$ (четное продолжение) и разложим ее в ряд Фурье по всей тригонометрической системе $1, \cos nx, \sin nx$ $(n = 1, 2, \dots)$. Поскольку функция f, определенная на $[-\pi, \pi]$, является четной, все ее коэффициенты по синусам равны нулю. Это сразу видно из формулы (интегрируем по $[-\pi, \pi]$ нечетную функцию). Иначе говоря, функцию f на $[-\pi, \pi]$ (и, тем более, на $[0, \pi]$) можно аппроксимировать в среднем квадратичном с любой точностью линейными комбинациями системы (2). Отсюда вытекает полнота этой системы.

Полнота системы (3) доказывается аналогично с помощью нечетного продолжения на $[-\pi, 0)$: $f(-x) = -f(x)$. Для нечетных функций коэффициенты Фурье по системе $1, \cos nx$ $(n = 1, 2, \dots)$ равны нулю, что и требуется.

Выпишем формулу коэффициентов Фурье и равенство Парсеваля для $L_2[0, \pi]$, например, по $\sin nx$:

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^l f(x) \sin(nx) dx, \qquad \left(\|\sin nx\|^2_{L_2[0,\pi]} = \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^l f(x)^2 dx, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin nx.$$

§3. Ряд Фурье в комплексной форме

Тригонометрический ряд можно записать компактно, если воспользоваться формулами Эйлера

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Подставляем в ряд Фурье, получаем:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \Big] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \Big] =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx},$$

где $c_0 = \frac{a_0}{2}$ и при $n \geq 1$

$$\begin{cases} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}. \end{cases} \tag{4}$$

Выражение $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx}$ называется тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме. Коэффициенты c_n этого ряда выражаются через a_n и b_n по формулам (4). Однако легко написать и прямые формулы для c_n.

Действительно, непосредственно вычислим

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2\pi, & n = m. \end{cases}$$

Поэтому, умножая равенство

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx} \tag{5}$$

на e^{-imx} при $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и интегрируя:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = 2\pi c_m, \text{ т. е.}$$

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-imx} dx \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{6}$$

Разложение (5) остается в силе и для комплексных функций с интегрируемым квадратом на $[-\pi, \pi]$. Иначе говоря, функции $e^{inx}, n \in \mathbb{Z}$ образуют базис в комплексном гильбертовом пространстве $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. При этом выражения (6) представляют собой скалярные произведения f на e^{imx} в этом комплексном пространстве.

Равенство Парсеваля для $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

Если $\{c_n\}, \{d_n\}$ – коэффициенты Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$, то скалярное произведение в этом пространстве будет иметь вид:

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot \overline{d_n}.$$

Заменив функции e^{inx} на $e^{i \frac{\pi n}{l} x}$, можно перенести все сказанное на пространство $L_2[-l, l]$ комплексных функций на отрезке произвольной длины.

Заметим, что если f – вещественная функция, то для ее коэффициентов Фурье в комплексной форме имеют место соотношения

$$c_{-m} = \overline{c_m} \; \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Следует из (6) с помощью взятия сопряжения.

Лекция 7 (7 февраля 2017)

§1. Многочлены Лежандра

Линейные комбинации функций

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \tag{1}$$

порождают многочлены. Тогда по теореме Вейерштрасса о равномерной аппроксимации любой непрерывной функции на произвольном отрезке $[a, b]$ многочленами, эта система полна в L_2 на любом отрезке. Ортогонализуем эту систему на отрезке $[-1, 1]$ по отношению к скалярному произведению

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

и получим полную ортогональную систему

$$Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_n(x), \ldots$$

где $Q_n(x)$ – многочлен n-ой степени. Покажем, что каждый многочлен $Q_n(x)$ совпадает, с точностью до постоянного множителя, с многочленом

$$R_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

В самом деле, во-первых, система $\{R_n\}$ ортогональна. Пусть $n \geq m$, так как

$$\left.\frac{d^k}{dx^k}(x^2 - 1)^n\right|_{x=-1} = \left.\frac{d^k}{dx^k}(x^2 - 1)\right|_{x=-1} = 0$$

при всех $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, то интегрируя по частям, получаем:

$$\int\limits_{-1}^{1} R_m(x) \cdot R_n(x)dx = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2 - 1)^m \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2 - 1)^n dx = \ldots =$$

$$= (-1)^n \int\limits_{-1}^{1} \left[\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2 - 1)^m\right] \cdot (x^2 - 1)^n dx$$

При $m < n$, под знаком последнего интеграла стоит тождественный нуль. Отсюда получаем ортогональность системы $\{R_n\}$.

Во-вторых, ясно что многочлены R_n имеют степень n, т.е. каждый из них лежит в подпространстве, порожденном $n+1$ первыми элементами системы (1). Следовательно, системы $\{R_n\}$ и $\{Q_n\}$ обладают следующими свойствами:

1) ортогональность;

2) n-ый элемент каждой системы принадлежит подпространству, порождённому элементами $1, x, \ldots, x^{n-1}$;

Этими свойствами каждый элемент системы определяется однозначно (см. Теорему 1 из Лекции 1).

Можно вычислить нормализующий множитель и получить явные формулы для $Q_n(x)$. Однако обычно рассматривают не эти многочлены, а многочлены

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

которые называются многочленами Лежандра. Можно показать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_m(x) dx = \begin{cases} 0 \text{ при } n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1} \text{ при } n = m. \end{cases}$$

Вот первые 4 многочлена Лежандра:

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},\ P_3(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

Разложение функции f на отрезке $[-1, 1]$ по многочленам Лежандра имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot P_n(x),\ \text{где } c_n = \frac{2n+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x) \cdot P_n(x) dx.$$

Этот ряд сходится в среднем квадратичном. Выпишем так же равенство Парсеваля

$$\int\limits_{-1}^{1} f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \cdot c_n^2$$

§2. Ортогональные системы в произведениях

Пусть на множествах X' и X'' определены меры μ' и μ''. Соответствующие пространства функций с интегрируемым квадратом обозначим L_2' и L_2''. В произведении $X = X' \times X''$ рассмотрим меру $\mu = \mu' \otimes \mu''$ и обозначим через L_2 отвечающее ей пространство функций с интегрируемым квадратом.

Теорема 1 *Если $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ – полные ортонормированные системы соответственно в L_2' и L_2'', то система их произведений*

$$f_{mn}(x, y) = \varphi_m(x) \cdot \psi_n(y)$$

есть полная ортонормированная система в L_2.

Доказательство. В силу Теоремы Фубини

$$\int\limits_{X} f_{mn}^2(x, y) d\mu = \int\limits_{X'} \varphi_m^2(x) \left(\int\limits_{X''} \psi_n^2(y) d\mu'' \right) d\mu' = 1.$$

Если $m \neq m_1$, то в силу той же теоремы

$$\int\limits_X f_{mn}(x,y) \cdot f_{m_1n_1}(x,y) d\mu = \int\limits_{X''} \psi_n(y)\psi_{n_1}(y) \left(\int\limits_{X'} \varphi_m(x)\varphi_{m_1}(x) d\mu' \right) d\mu'' = 0,$$

поскольку функция $f_{mn}(x,y) \cdot f_{m_1n_1}(x,y)$ двух переменных на $X = X' \times X''$ суммируема. Если $m = m_1$, но $n \neq n_1$, тогда

$$\int\limits_X f_{mn}(x,y) \cdot f_{m_1n_1}(x,y) d\mu = \int\limits_{X'} \varphi_m^2(x) \left(\int\limits_{X''} \psi_n(y)\psi_{n_1}(y) d\mu'' \right) d\mu' = 0.$$

Докажем, что система $\{f_{mn}(x,y)\}$ полна L_2. Пусть существует функция $f \in L_2$, которая ортогональна всем f_{mn}. Положим

$$F_m(y) = \int\limits_{X'} f(x,y)\varphi_m(x) d\mu'.$$

Легко видеть, что $F_m(y) \in L_2''$. Поэтому функция $F_m(y) \cdot \varphi_n(y)$ интегрируема $\forall n \in \mathbb{N}$. Снова используем теорему Фубини:

$$\int\limits_{X''} F_m(y)\psi_n(y) d\mu'' = \int\limits_X f(x,y) f_{mn}(x,y) d\mu = 0.$$

В силу полноты $\{\psi_n\}$ в L_2'', отсюда вытекает, что для почти всех $y \in X''$

$$F_m(y) = 0.$$

Но тогда при почти каждом $y \in X''$ имеем:

$$\int\limits_{X'} f(x,y)\varphi_m(x) d\mu' = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

В силу полноты системы $\{\varphi_m\}$ в L_2', отсюда получаем, что при почти каждом y мера множества

$$\mu'(x \in X' | f(x,y) \neq 0) = 0.$$

В силу теоремы Фубини, это означает, что на X функция $f(x,y)$ равна 0 почти всюду. ■

Применим эту теорему для построения конкретных ортогональных систем. В пространстве функций двух переменных

$$f(x,y), \quad [-\pi \leq x, y \leq \pi]$$

с интегрируемым квадратом полную ортогональную систему образуют попарные произведения элементов систем

$$1, \cos mx, \sin mx \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

$$1, \cos nx, \sin nx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

т.е. функции

$$1, \cos mx,\ \sin mx,\ \cos ny,\ \sin ny,\ \cos mx \cos ny,\ \cos mx \sin ny,\ \sin mx \cos ny, \sin mx \cos nx.$$

Соответствующие ряды Фурье выглядят достаточно громоздко, поэтому, удобно использовать показательные функции:

$$e^{imx} \cdot e^{iny} = e^{i(mx+ny)}, \quad (n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Этому базису отвечает ряд Фурье:

$$f(x,y) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} c_{mn} \cdot e^{i(mx+ny)}, \qquad \text{где } c_{mn} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) e^{-i(mx+ny)} dxdy.$$

Приведем также равенство Парсеваля для этой ортогональной системы:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x,y)|^2 dxdy = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} |c_{mn}|^2.$$

Все сказанное очевидно переносится на случай $\mathbb{R}^n$.

§3. Многочлены, ортогональные относительно данного веса

Мы получили многочлены Лежандра путем ортогонализации системы

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots \tag{2}$$

относительно скалярного произведения

$$\int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx,$$

которое отвечает обычной мере Лебега на отрезке $[-1, 1]$. Если задать другую меру μ, такую, что функции (2) в соответствующем пространстве L_2 со скалярным произведением

$$\int_{-1}^{1} f(x) g(x) d\mu$$

линейно независимы, то применив процесс ортогонализации, мы придем к другой системе многочленов $\{Q_n\}$, зависящий от выбора меры μ.

Предположим, мера μ определена для измеримых по Лебегу подмножеств $[-1, 1]$ по формуле:

$$\mu(E) = \int_{E} g(x) dx \tag{3}$$

где $g(x)$ – фиксированная неотрицательная суммируемая функция. Условие ортонормированности

$$(Q_m, Q_n) = \begin{cases} 1, & \text{при } m = n \\ 0, & \text{при } m \neq n \end{cases}$$

запишется в виде:

$$\int\limits_{-1}^{1} Q_m(x) Q_n(x) g dx = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}. \qquad (4)$$

Функция $g(x)$, определяющая меру (3), носит название <u>веса</u> или <u>весовой функции</u>. Многочлены $Q_n(x)$, которые удовлетворяют (4), называются ортогональными с весом $g(x)$. Выбор разных весов приводит к разным системам многочленов. В частности, положив

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

мы получим многочлены, совпадающие с точностью до постоянного множителя с т.н. многочленами Чебышева, которые определяются формулой

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (5)$$

Ортогональность этих многочленов относительно веса $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ легко проверить, сделав замену $x = \cos\theta$, $dx = -\sin\theta \, d\theta$, $\sqrt{1 - x^2} = \sin\theta$.

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_m(x) \cdot T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int\limits_{0}^{\pi} \cos(m\theta) cos(n\theta) \, d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Полнота системы $\{T_n(X)\}$ следует из изоморфизма пространства $L_2\left([-1, 1], \mu\right)$ с пространством $L_2\left([0, \pi]\right)$. Отображение задастся заменой перемен $x = \cos\theta$. При этом отображении $f(x) \longrightarrow f(\cos\theta)$. Скалярное произведение, очевидно, сохраняется, поэтому ортогональные системы переходят в ортогональные, и свойство полноты ортогональной системы сохраняется. Следовательно, $\{T_n(x)\} \leftrightarrow \{\cos nx\}$ – это полные системы в своих пространствах.

Лекция 8 (10 февраля 2017)

§1. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Рассмотрим пространство $L_2[-\pi, \pi]$ функций с суммируемым квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$. Как было показано, это бесконечномерное полное евклидово пространство, т.е. гильбертово пространство. Функции $1, \ \cos nx, \sin nx \quad (n = 1, 2, \ldots)$ образуют полную ортогональную систему, поэтому для каждой функции $f \in L_2[-\pi, \pi]$ ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \text{ где} \tag{1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \tag{2}$$

сходится к f в среднем квадратичном, т.е. в метрике $L_2[-\pi, \pi]$. Однако в связи с применением рядов Фурье к задачам математической физики будет существенно установить условия, при которых ряд сходится не только в среднем, но и в точке, всюду и даже равномерно. Установим сначала условия сходимости тригонометрического ряда в данной точке.

Сделаем ряд замечаний.

Вместе с функцией на отрезке $[-\pi, \pi]$ можно говорить о периодических функциях с периодом 2π на всей прямой, поскольку каждую функцию, заданную на отрезке, можно периодически продолжить. Далее, функции из тригонометрической системы ограничены, поэтому, формулы (2), определяющие коэффициенты Фурье по этой системе, имеют смысл для любой суммируемой функции. Таким образом, каждой функции $f \in L_1[-\pi, \pi]$ отвечает совокупность её коэффициентов Фурье и её ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Перейдем теперь к вопросу о сходимости этого ряда в данной точке x к значению функции f в этой точке. Положим

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \tag{3}$$

Преобразуем $S_n(x)$, подставив в (3) вместо коэффициентов a_k и b_k их интегральные выражения, и переменную интегрирования обозначим t:

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt\right] dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\right] dt$$

Воспользуемся формулой:

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos nu = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}},$$

для проверки которой достаточно умножить правую и левую части на $2\sin\frac{u}{2}$ и применить известное тригонометрическое тождество

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Получим следующие равенства:

$$\sin\frac{u}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{u}{2},$$

$$\sin\frac{3u}{2} - \sin\frac{u}{2} = \cos u\cdot 2\cdot\sin\frac{u}{2},$$

$$\ldots$$

$$\sin\frac{2n+1}{2}u - \sin\frac{2n-1}{2}u = \cos nu\cdot 2\sin\frac{u}{2}.$$

Сложим эти равенства и получим необходимое тождество.

Для частичных сумм $S_n(x)$ получаем формулу:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt \tag{4}$$

Это представление $S_n(x)$ называется интегралом Дирихле.

Частичную сумму $S_n(x)$ ряда Фурье функции $f\in L_1[-\pi,\pi]$ представили в виде интеграла Дирихле. Сделаем замену $t-x=z$. Поскольку под интегралом стоит периодическая функция с периодом 2π, интеграл от неё по любому отрезку длины 2π имеет одно и то же значение. Поэтому при интегрировании по z можно сохранить прежние пределы $-\pi$ и π. Получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}dz. \tag{5}$$

Функция

$$D_n(z) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}$$

называется ядром Дирихле. Интеграл Дирихле имеет вид

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_n(z)dz.$$

Из представления

$$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} + \cos z + \cos 2z + \ldots + \cos nz$$

следует, что $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(z)dz = 1$. Используем это равенство и запишем разность

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x+z) - f(z)] \cdot \frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}} dz, \tag{6}$$

или более компактно

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x+z) - f(z)] \cdot D_n(z)dz,$$

Мы свели вопрос о сходимости $S_n(x)$ к $f(x)$ к вопросу о стремлении к нулю интеграла (6). Дальнейшее исследование основано на следующей лемме.

Лемма 1 (Риман) *Если функция φ суммируема на отрезке $[a, b]$, то*

$$\lim_{p\to\infty}\int\limits_a^b \varphi(x)\sin px dx = 0 \qquad \textit{(то же верно для } \cos px\textit{)} .$$

Доказательство. Если φ – непрерывно дифференцируемая функция, то интегрируя по частям имеем:

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\sin px dx = -\varphi(x)\cdot\frac{\cos px}{p}\Bigg|_a^b + \int\limits_a^b \varphi'(x)\frac{\cos px}{p}dx \to 0$$

поскольку

$$\int\limits_a^b \varphi'(x)\frac{\cos px}{p}dx = O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Пусть теперь φ – произвольная суммируемая функция $[a, b]$. Поскольку непрерывно дифференцируемые функции плотны в $L_1[a, b]$, для <u>любого</u> $\varepsilon > 0$ найдется функция $\varphi_\varepsilon \in C^1[a, b]$, что

$$\int\limits_a^b |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad \text{Далее имеем:}$$

$$\left|\int\limits_a^b \varphi(x)\sin px dx\right| \le \left|\int\limits_a^b [\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)]\sin px dx\right| + \left|\int\limits_a^b \varphi_\varepsilon(x)\sin px dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int\limits_a^b \varphi_\varepsilon(x)\sin px dx\right|.$$

Второе слагаемое стремится к нулю при $p \to \infty$. ■

Замечание 1 *Из леммы Римана вытекает, что для любого $\delta > 0$*

$$\int\limits_{\delta<|z|<\pi} f(x+z)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}dz \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Это означает, что сходимость и сумма ряда Фурье в точке x (т.е. предел интеграла Дирихле (5) при $n \to \infty$) зависит лишь от значений функции f в любой малой окрестности т. x. Это утверждение называется принципом локализации ряда Фурье.

Сформулируем и докажем достаточный признак сходимости ряда Фурье.

Теорема 1 *Если f – суммируемая функция и при фиксированном $x \in [-\pi, \pi]$ для некоторого $\delta > 0$ существует (конечен) интеграл*

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt \tag{7}$$

тогда частичные суммы $S_n(x)$ сходятся в этой точке к $f(x)$.

Доказательство. Перепишем интеграл (6) в следующем виде:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \cdot \frac{z}{2\sin\frac{z}{2}} \cdot \sin\frac{2n+1}{2} z \, dz. \tag{8}$$

Если функция $\frac{f(x+z)-f(x)}{z}$ интегрируема по z в пределах $[-\delta, \delta]$, то она интегрируема и на $[-\pi, \pi]$ (поскольку $f \in L_1[-\pi, \pi]$). Но тогда интегрируема и функция $\frac{f(x+z)-f(x)}{z} \cdot \frac{z}{2\sin\frac{z}{2}}$. Поэтому к интегралу (8) можно применить Лемму 1, и мы получаем, что этот интеграл стремится к 0. ∎

Замечание 2 *Сходимость интеграла (7) называется условием Дини. Легко видеть, что условие Дини выполнено, если в данной точке x функция f непрерывна и имеет конечную производную (или хотя бы левую и правую производные).*

Условие Дини можно ослабить, потребовав конечность следующих интегралов:

$$\int\limits_{-\delta}^{0} \left| \frac{f(x+z) - f(x-0)}{z} \right| dz \quad \text{и} \quad \int\limits_{0}^{\delta} \left| \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \right| dz, \tag{9}$$

где $f(x-0)$ и $f(x+0)$ – это левый и правый пределы функции f в точке x. Действительно, поскольку функция $\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}$ является четной, разность

$$S_n(x) - \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2} \quad \text{можно представить в виде:}$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} [f(x+z) - f(x-0)] \cdot \frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} [f(x+z) - f(x+0)] \cdot \frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}$$

Тогда при условии существования интегралов (9) эти выражения, по лемме 1, стремятся к нулю.

§2. Условие "глобальной" сходимости ряда Фурье

Следствие 1 *Пусть f – ограниченная функция с периодом 2π, имеющая лишь разрывы 1-го рода (тогда она суммируемая), и пусть f имеет в каждой точке левую и правую производные. Тогда её ряд Фурье сходится всюду, а его сумма равна $f(x)$ в точках непрерывности и равна $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ в точках разрыва.*

Условие Дини, обеспечивающее сходимость ряда Фурье, можно заменить другими условиями, но отбросить его совсем нельзя. Даже среди непрерывных функций существует функции с рядом Фурье, расходящимся в некоторых точках. Среди суммируемых функций, как показал А.Н. Колмогоров, существует такие, ряд Фурье которых расходится всюду. Вместе с тем, для функций из L_2, их ряд Фурье сходится почти всюду. Последнее утверждение носит название проблемы Лузина, которая была решена лишь в 1966 году Карлесоном. Из этого в частности следует, что ряд Фурье непрерывной функции обязан сходиться почти во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$.

Лекция 9 (14 февраля 2017)

§1. Условия равномерной сходимости ряда Фурье

Мы установили условия, достаточные для сходимости ряда Фурье функции f в каждой точке. Класс функций, удовлетворяющих этим условиям весьма широк. Непрерывности функции мало. Рассмотрим теперь вопрос о равномерной сходимости ряда Фурье. Ясно, что если у функции $f(x)$ есть хоть один разрыв, то её ряд Фурье не может сходиться равномерно, поскольку сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций всегда непрерывна. Значит, непрерывность функций – это необходимое условие. Сформулируем простое достаточное условие равномерной сходимости.

Теорема 1 *Если функция f с периодом 2π является непрерывной, а её производная $f'(x)$ кусочно-непрерывна (т.е., она имеет непрерывную производную всюду, кроме конечного числа точек отрезка $[-\pi, \pi]$ в которых существует конечная левая и правая производные), то ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно, на всей прямой.*

Доказательство. Обозначим a_n' и b_n' коэффициенты Фурье функции f'. Так как f имеет кусочнонепрерывную производную, то в интеграле

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)d\sin(nx)$$

можно применить формулу интегрирования по частям:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}f(x)\frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx = -\frac{b_n'}{n}\ ,\ n \neq 0.$$

Аналогично получаем

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{a_n'}{n} \quad \text{т.к. } f(x) \text{ – периодическая функция.}$$

Следовательно,

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n'|}{n} + \frac{|b_n'|}{n}. \tag{1}$$

Этот ряд сходится, поскольку

$$\frac{|b_n'|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(|b_n'|^2 + \frac{1}{n^2}\right), \quad \frac{|a_n'|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(|a_n'|^2 + \frac{1}{n^2}\right), \text{ причем}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} {a_n'}^2 + {b_n'}^2 < \infty \quad \text{(последнее в силу неравенства Бесселя для } f'\text{).}$$

Числовой ряд (1) служит, очевидно, мажорантой для ряда Фурье функции f. Но тогда, по признаку Вейерштрасса, ряд Фурье функции f равномерно (и абсолютно) сходится. Осталось показать, что его сумма есть f. Пусть φ – сумма ряда Фурье функции f. Тогда φ имеет те же коэффициенты Фурье, что и f. Отсюда, в силу непрерывности обеих функций, получаем, что $f \equiv \varphi$. ■

Замечание 1 *Условия теоремы 1 можно ослабить. Достаточно предполагать, что функция $f(x)$ непрерывна, почти всюду дифференцируема и её производная $f'(x)$ принадлежит пространству $L_2[-\pi, \pi]$. При этом можно интегрировать по частям.*

§2. Теорема Фейера

Пусть f – непрерывная функция с периодом 2π на прямой. Эта функция определяется своим рядом Фурье однозначно. Действительно, если f_1 и f_2 – две непрерывные функции, имеющие одни и те же коэффициенты Фурье, то у непрерывной функции $f_1 - f_2$ все коэффициенты Фурье равны нулю, но такая функция равна нулю почти всюду, т.е. $f_1 \equiv f_2$ всюду. Однако, поскольку ряд Фурье непрерывной функции не обязан сходиться, то мы не можем получить функцию f, суммируя её ряд Фурье. Способ восстановления непрерывной функции по её коэффициентам Фурье придумал Фейер. Пусть

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx) \tag{2}$$

частичная сумма ряда Фурье функции f. Положим

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n} \tag{3}$$

выражения σ_n – средние арифметические сумм S_k – называются суммами Фейера функции f.

Замечание 2 *Пусть числовая последовательность $\{d_k\}$ сходится:* $\lim_{n\to\infty} d_n = d$. *Тогда последовательность $D_n = \frac{d_1+d_2+\ldots+d_n}{n}$ так же сходится к d. Обратное неверно: Например: $d_n = (-1)^n$ и в этом случае $D_n \to 0,\ d_n \nrightarrow 0$.*

Теорема 2 (Фейер) *Если f – непрерывная функция с периодом 2π, то последовательность $\{\sigma_n\}$ её сумм Фейера сходится к f равномерно по всей оси.*

Доказательство. Воспользуемся полученной нами формулой для частичной суммы ряда Фурье:

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\frac{\sin\frac{2k+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}dz.$$

Подставив эти интегралы в равенство (3), получим для $\sigma_n(x)$ следующие варажение:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\frac{2k+1}{2}z}{2\sin\frac{z}{2}}\right\} f(x+z)dz.$$

Воспользуемся формулой

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)u = \frac{\sin^2 nu}{\sin u},$$

которую легко получить, применив тождество $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\alpha}{2}$ и суммируя по k равенствам

$$2\sin(2k+1)u \cdot \sin u = \cos 2ku - \cos 2(k+1)u$$

т.е.

$$2\sin u \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)u = \sum_{k=0}^{n-1} \cos 2ku - \cos 2(k+1)u = 1 - \cos 2nu = 2\sin^2 nu.$$

Получаем формулу для $\sigma_n(x)$

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} \right)^2 f(x+z)dz, \tag{4}$$

которая называется <u>интегралом Фейера</u>. Функция

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin n\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} \right)^2$$

называется <u>ядром Фейера</u> порядка n. Формулу (4) перепишем в виде:

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \cdot \Phi_n(z)dz. \tag{5}$$

Ядро Фейера имеет следующие свойства:

1) $\Phi_n(z) \geq 0$, функция четная;

2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)dz = 1$;

3) $\forall\delta > 0 \quad \int\limits_{-\pi}^{\delta} \Phi_n(z)dz = \int\limits_{-\delta}^{\pi} \Phi_n(z)dz = \eta_n(\delta) \to 0 \ (n \to \infty)$.

Первое из этих свойств очевидно, второе получается из тождества (5) если рассмотреть $f(x) \equiv 1$ и учесть, что для такой функции сумма Фейера $\sigma_n(z) \equiv 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Третье свойство вытекает из четности ядра Фейера и из того, что при $\delta \leq z \leq \pi$ получаем: $\sin\frac{z}{2} > \frac{z}{3} > \frac{\delta}{\pi}$ (если δ достаточно мало) и, следовательно,

$$\left(\frac{\sin\frac{nz}{2}}{\sin\frac{z}{2}} \right)^2 < \left(\frac{\pi}{\delta} \right)^2, \quad \text{и поэтому} \quad \eta_n(\delta) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Докажем теперь теорему Фейера. Так как функция f непрерывная и периодическая, то она ограниченная и равномерно непрерывная на всей оси, т.е. существует такая постоянная M, что для всех x

$$|f(x)| \leq M, \tag{6}$$

и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ как только } |x' - x''| < \delta. \tag{7}$$

Нам необходимо оценить интеграл

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+z)] \cdot \Phi_n(z) dz,$$

который можно представить в виде суммы трёх интегралов

$$J_- = \int\limits_{-\pi}^{-\delta} \{f(x) - f(x+z)\} \, \Phi_n(z) dz$$

$$J_0 = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \{f(x) - f(x+z)\} \, \Phi_n(z) dz$$

$$J_+ = \int\limits_{\delta}^{\pi} \{f(x) - f(x+z)\} \, \Phi_n(z) dz \ , \ (J_- = J_+)$$

Из (6) и (7) непосредственно вытекают оценки

$$|J_-| \leq 2M \cdot \eta_n(\delta), \quad |J_+| \leq 2M \cdot \eta_n(\delta),$$

$$|J_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int\limits_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(z) dz \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z) dz = \frac{\varepsilon}{2},$$

где в последней строке мы воспользовались также свойствами 1) и 2) ядра Фейера.

Выберем теперь n_0 настолько большим, что при $n > n_0$ для данного δ выполнилось: $2M\eta_n(\delta) < \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Откуда следует утверждение теоремы. ■

Следствие 1 *Ряд Фурье непрерывной функции в каждой точке x либо расходится, либо сходится к $f(x)$.*

Доказательство. Если $S_n(x)$ сходится, то сходится к $\sigma_n(x)$ к тому же пределу, но, как доказали, $\sigma_n(x) \to f(x)$. Следовательно, $S_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty)$. ■

§3. Теорема Фейера для пространства L_1

. В теореме Фейера достигнута определенная симметрия между условием и утверждением теоремы. Из того, что функция f принадлежит пространству $C\,[-\pi,\,\pi]$ непрерывных функций следует, что отвечающие ей суммы Фейера сходятся к f в метрике того же самого пространства $C\,[-\pi,\,\pi]$. Аналогично, теорему можно получить для других функциональных пространств, в частности для $L_1\,[-\pi,\,\pi]$. Точнее, имеет место следующая теорема, которую можно назвать теоремой Фейера для суммируемых функций.

Теорема 3 *Если $f \in L_1\,[-\pi,\,\pi]$, то суммы Фейера функции f сходятся к ней по норме пространства $L_1\,[-\pi,\,\pi]$.*

Доказательство этой теоремы можно получить с помощью рассуждений, близких к доказательству теоремы 2. При этом решающую роль играет хорошие свойства ядра Фейера. Отметим так же, что для сумм Фурье (т.е. для частичных сумм рядов Фурье) это неверно: существуют суммируемые функции, ряды Фурье которых не сходятся в $L_1\,[-\pi,\,\pi]$

Приведем один важный факт, вытекающий из теоремы 3.

Следствие 2 *Всякая суммируемая функция однозначно (с точностью до эквивалентности) определяется своими коэффициентами Фурье. Действительно, пусть f и g – две суммируемые функции, имеющие одинаковые коэффициенты Фурье. Тогда коэффициенты функции $f-g$ равны 0. Следовательно, тождественно равны 0 и все суммы Фейера для $f-g$. Но тогда их предел в L_1, т.е. функция $f-g$, равна 0 почти всюду.*