

**ЛИСТОК 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ В БАНАХОВЫХ
ПРОСТРАНСТВАХ**

ВАР ИСЧ., 3-4 КУРС, **10.03.2017**

2◊1 Найдите сопряженные функции к функциям:

а) $\frac{|x|^p}{p}, p \geq 1$;

б) e^{x-1} ;

в) $f(x) = \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle b, x \rangle + c$, где Q — положительно определенная $n \times n$ -матрица, $b, x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$;

г) $\max\{x_1, \dots, x_n\}$.

2◊2 Пусть функция f не является выпуклой, опишите ее вторую сопряженную f^{**} .

2◊3 Найдите вариации функционалов:

а) $V[y] = \int_a^b yy' dx$;

б) $V[y] = y^2(0) + \int_0^1 (xy + y'^2) dx$.

2◊4 Исследуйте на экстремум функционал

$$V[y] = \int_{-1}^1 (y - |x|)^2 dx.$$

2◊5 Опишите касательное пространство $T_{\hat{x}}M$ к множеству $M = \{x \in C[0, 1] \mid \sin(x(0)) = \sin(x(1)) = 0\}$ в точке $\hat{x}(t) = \frac{\pi t}{2}$.

2◊6 Найдите производные Фреше:

а) $f : \mathbf{H} \rightarrow (a, x), a \in \mathbf{H}, \mathbf{H}$ — гильбертово пространство;

б) $f : \mathbf{H} \rightarrow (x, x), \mathbf{H}$ — гильбертово пространство;

в) $f : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, f(x(\cdot)) = \int_0^1 x^3(t) dt$.

2◊7 Опишите форму однородной нерастяжимой веревки, концы которой закреплены в двух фиксированных точках вертикальной плоскости.

2◊8 Исследуйте на экстремум следующую задачу:

$$\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{rmaxtr}, \quad \int_0^1 x dt = 1, \quad \int_0^1 tx dt = 0, \quad x(0) = x(1) = 0.$$