

## ЛИСТОК 11. ИНТЕГРАЛЫ

АНАЛИЗ, 1 КУРС, 26.03.2017

11◊1 Посчитайте интегралы (обязательная задача!):  $\int_0^2 |x-1| dx$ ,  $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$ ,  $\int_0^1 \arccos x dx$ ,

$$\int_{1/e}^e |\ln x| dx, \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} dx, \int_0^\pi e^x \cos^2 x dx, \int_{-1}^2 \frac{1+x^2}{x^4+1} dx.$$

11◊2 Посчитать интеграл  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x}$ .

11◊3 Докажите, что каждая функция  $f \in C^1[a, b]$  может быть представлена в виде разности двух неубывающих функций из  $C^1$ .

11◊4 Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k^2 + n^2 + 2}{n^3 + kn^2 + 1}$ .

11◊5 Пусть  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  монотонная. Докажите, что  $\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

11◊6 Докажите, что  $\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx$  при  $f, g \in C[a, b]$ .

11◊7 а) Докажите, что  $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$  при  $f \in C[0, 1]$ .

б) Посчитайте  $\int_0^\pi \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$ .

11◊8 Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right) \dots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp\left(\int_0^1 \ln f(x) dx\right)$  при  $f \in C[0, 1]$ ,  $f(x) > 0$ .

11◊9 Докажите равенство  $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t} dt$ .

11◊10 Пусть  $f \in C^1[a, b]$  и  $f(a) = 0$ . Докажите, что  $\|f\|_C^2 \leq (b-a) \int_a^b |f'(x)|^2 dx$ .

11◊11 Пусть  $f \in C[-a, a]$  — чётная функция. Докажите, что  $\int_{-a}^a \frac{f(x) dx}{1+e^x} = \int_0^a f(x) dx$ .

11◊12 Пусть  $f \in C^1[a, b]$  и  $x \in (a, b)$ . Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(f\left(x + \frac{k}{n^2 + k^2}\right) - f(x)\right) = f'(x) \ln \sqrt{2}$ .