Лекция 8. Краевые задачи и оператор Лапласа в круге.

1 Музыка

2 Переход от неоднородности в граничных условиях к неоднородности в правой части

3 Краевая задача для уравнения теплопроводности

4 Оператор Лапласа в круге.

В полярных координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}.$$

Рассматриваем $u \in C^2(D),\ u|_{\partial D} = 0$

$$D = \{r \leq 1\}.$$

Ищем собственные функции в виде

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

Решаем уравнение:

$$\Delta u = \lambda u;$$

одновременно ищем λ. Получаем:

$$R''\Phi + \frac{1}{r} R'\Phi + \frac{1}{r^2}\Phi'' = \lambda R\Phi.$$

Умножаем на r^2 и делим на $R\Phi$:

$$\frac{r^2 R'' + rR' - \lambda r^2}{R}(r) = -\frac{\Phi''}{\Phi}(\varphi).$$

Работает ключевая идея классического метода разделения переменных: если функции от разных переменнных равны, значит, они константы. В частности,

$$\Phi'' = C\Phi.$$

Это значит, что C-собственное значение оператора Лапласа на окружности. Мы уже знаем, что

$$C = -n^2,\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Для функции R получаем уравнение:

$$r^2R'' + rR' - (\lambda r^2 + n^2)R = 0,\ R(1) = 0. \tag{1}$$

eqn:lap

Теорема 1 *Для каждого n существует счетное число решений задачи* (1).

5 Уравнение Бесселя.

Доказательство Серия решений, упомянутая в теореме, соответствует нулям "избранного" решения *уравнения Бесселя*:

$$r^2R'' + rR' + (r^2 - n^2)R = 0. \tag{2}$$

eqn:bn

Это - "плохое" линейное уравнение на прямой. Если разрешить его относительно старшей производной, то у коэффициентов получатся полюса в нуле. С другой стороны, уравнение Бесселя имеет вид

$$L\left(r\frac{r}{dr}\right)R = 0, \tag{3}$$

eqn:fuch

где L - многочлен с голоморфными коэффициентами:

$$\left(r\frac{d}{dr}\right)\left(r\frac{d}{dr}R\right) + (r^2 - n^2)R = 0.$$

Такие уравнения называются Фуксовыми и исследуются так. Функциональные коэффициенты многочлена L заменяются своими свободными членами; получается многочлен от $r\frac{r}{dr}$ с постоянными коэффициентами. Он задает *уравнение Эйлера*:

$$L_0\left(r\frac{r}{dr}\right)R \equiv \Sigma a_k\left(r\frac{r}{dr}\right)^k R = 0. \tag{4}$$

eqn:eil

Функция r^λ - собственная для оператора $r\frac{r}{dr}$ с собственным значением λ. Корни многочлена L_0 - характеристические числа уравнения Эйлера (4); им соответсвтуют решения r^λ этого уравнения. Они же называются характеристическими числами уравнения (3).

Теорема 2 *Уравнение* (3) *имеет решение вида*

$$R = r^\lambda f(r),$$

где функция f - голоморфная, ненулевая в нуле.

Мы не будем доказывать эту теорему в общем виде, а дадим ее "кустарное" доказательство для уравнений Бесселя.

Характеристические числа уравнения (2) имеют вид $\pm n$. Значит, уравнение (2) при $n = 0$ имеет решение $J_0(r),\ J_0(0) = 1$, а при $n \neq 0$ - решение $J_n(r) = r^n K_n(r)$, где $K_n(0) \neq 0,\ K_n$ голоморфно в нуле.

Нам нужно получить из одной функции J_n серию функций $R_{nk}, R_{nk}(1) = 0$. Для этого нужно исследовать колеблемость J_n.

6 Колеблемость функций Бесселя.

Предложение 1 *Уравнения второго порядка*

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx - 0$$

можно привести к виду

$$\ddot{y} + By = 0$$

заменой

$$x = f(t)y,$$

где $f(t) = \exp(-\frac{A}{2})$, *где* $A' = a$.

Задача 1 *Докажите предложение.*

В соответствии с общим рецептом, делаем замену

$$R = \frac{y}{\sqrt{r}}.$$

Получаем уравнение:

$$\ddot{y} + y\left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right) = 0.$$

В силу общей теории, оно имеет бесконечно много нулей α_{kn}, $k \in \mathbb{N}$, и $\frac{\alpha_{kn}}{k} \to \pi$ при $k \to \infty$.

7 Собственные значения.

Из уравнения Бесселя немедленно следует, что функция $R_\alpha(r) = J_n(\alpha r)$ удовлетворяет уравнению (1) при $\lambda = -\alpha^2$. Теорема доказана:

$$\lambda_{kn} = -\alpha_{kn}^2.$$

$\square$

8 Почему струна поет, а барабан гудит?

Потому что собственные значения оператора Лапласа на отрезке соизмеримы (имеют рациональные отношения), а на диске - нет.