

Занятие 8. Оператор Лапласа и уравнение теплопроводности

1. Решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности:

$$u_t = u_{xx}, \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = \sin t, \quad u|_{t=0} = 0$$

2. Найти предел при $t \rightarrow \infty$ решения задачи:

$$u_t = \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad |x| \leq 1, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{|x|=1} = \sin \phi$$

3. Записать оператор Лапласа в полярных координатах
4. Найти разложение функций Бесселя в ряд Тейлора в нуле и доказать его сходимость
5. Найти гармонические функции в \mathbb{R}^n , зависящие только от радиуса
6. При каких значениях n эти функции принадлежат L_2 , L_1 в окрестности нуля? в окрестности бесконечности?
7. * Обосновать метод разделения переменных для краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке; граничные значения нулевые.
8. * Обосновать соотношение из лекции: α_{kn} , $k \in \mathbb{N}$, и $\frac{\alpha_{kn}}{k} \rightarrow \pi$ при $k \rightarrow \infty$
9. * Исходя из решения задачи о колебаниях струны закрепленной на концах, объяснить зависимость звучания струны от ее длины, плотности и натяжения.

Solved in the class: 1, частично 2

HW: 2, 4, 5, 7, 8, 9. Последние 3 задачи - дополнительные. Подробное и полное решение каждой них зачитывается как отдельная домашняя работа.