Семинар 7. Бозон-фермионное соответствие и "разреженные"бозоны.

Задача 1. Рассмотрим алгебру Клиффорда $\mathbb{C}[\psi_i,\psi_i^*]_{i\in\mathbb{Z}}$, где ψ_i. Пусть $\psi(z),\psi^*(z)$ – соответствующие производящие ряды. Рассмотрим представление M алгебры Клиффорда, порожденное вектором v таким, что $\psi_i v = 0 = \psi_j^* v$ для $i \geqslant 0, j > 0$.

(а) Докажите, что $h(z) = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} h_i z^{-i} =: \psi(z)\psi^*(z)$: корректно определено в этом представлении. Докажите, что коэффициенты ряда $h(z)$ порождают алгебру Гейзенберга.

Задача 2. На пространстве M имеются 2 градуировки ("заряд"и "энергия"): относительно первой степень ψ_i равна 1, а ψ_i^* – -1, относительно второй степень ψ_i и ψ_i^* равна i. Старший вектор v имеет степень 0 относительно обеих градуировок. Характером биградуированного пространства $V = \bigoplus V^{(i,j)}$ называется формальный ряд $\sum\limits_{i,j} \dim V^{(i,j)} t^i q^j$. Найдите характер пространства M.

Задача 3. На алгебре Клиффорда действует группа $\mathbb{Z}$ сдвигами номеров образующих ($[i](\psi_j) = \psi_{i+j}$ и $[i](\psi_j^*) = \psi_{-i+j}^*$).

(а) Покажите, что на пространстве M корректно определено действие группы $\mathbb{Z}$, так, что для любого $w \in M$ выполнено $\psi_j[i]w = [i]\psi_{i+j}w$ (и аналогично с ψ^*).

(б) Пользуясь соотношением $[h_i,\psi_j] = \psi_{i+j}$ выразите $\psi(z),\psi^*(z)$ через операторы $[1],[-1]$ и h_i.

Рассмотрим алгебру многочленов $\mathbb{C}[a_i]_{i\in\mathbb{Z}}$. Пусть $a(z) := \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} a_i z^{-i}$. Пусть F_n – представление алгебры $\mathbb{C}[a_i]_{i\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $\mathbb{C}[a_i]_{i\in\mathbb{Z}}/(a_i)_{i\geqslant 0}$. Пусть $v = 1 \in F_n$ – старший вектор, и пусть $W_n = F_n/\{a(z)^2 = 0\}$. На пространствах F_n и W_n определены те же 2 градуировки: относительно первой степень a_i равна 1, относительно второй степень a_i равна i. Старший вектор имеет степень 0 относительно обеих градуировок.

Задача 4. Найдите общий вид матричных элементов $\langle w^\vee, a(z_1)\dots a(z_k)w\rangle$ в пространстве W_n.

Задача 5.

(а) Покажите, что элементы $a_{i_1}\cdot\ldots a_{i_k}v$ для всех наборов $0 > i_1 > \ldots > i_k$, таких, что $i_s - i_{s+1} > 1$, образуют базис в W_0.

(б) Найдите характер пространства W_0.

(в) Найдите характер пространства W_n.

Задача 6.

(а) Покажите, что отображение $W_n \to W_{n+2}$, заданное как $w \mapsto a_{n+1}w$, является вложением.

(б) Найдите характер пространства $W := \varinjlim W_n$, считая, что вектор $v = 1 \in W_0$ имеет степень (0,0).

Задача 7. На алгебре $\mathbb{C}[a_i]_{i=-\infty}^{\infty}$ действует группа $\mathbb{Z}$ сдвигами номеров образующих ($[i](a_j) = a_{i+j}$) и абелева алгебра Ли $\mathfrak{h}$ порожденная дифференцированиями $h_i,\ i \in \mathbb{Z}$ такими, что $h_i(a_j) := 2a_{i+j}$.

(а) Покажите, что на пространстве W корректно определено действие группы $\mathbb{Z}$, так, что для любого $w \in W$ выполнено $a_j[i]w = [i]a_{i+j}w$.

(б) Покажите, что на пространстве W корректно определено действие центрального расширения алгебры Ли $\mathfrak{h}$ (т.е. алгебры Гейзенберга), так, что для любого $w \in W$ выполнено $a_j h_i w = (h_i a_j - a_{i+j})w$.