

Группы и алгебры Ли II. Семинар 15.03.17

Задача 1. Для матрицы $g \in SL(2, \mathbb{R})$ вычислите явно матричные коэффициенты разложений Ивасава:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi' & \sin \varphi' \\ -\sin \varphi' & \cos \varphi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 \\ 0 & \lambda'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\lambda_i, \lambda'_i > 0$. Всегда ли оно имеет место? Однозначно ли оно?

Задача 2. а) Докажите, что все одномерные представления группы \mathbb{R}^* определяются формулой $\lambda \rightarrow |\lambda|^{s-1} \operatorname{sgn}^{\varepsilon}(\lambda)$.

б) Опишите все одномерные представления группы \mathbb{C}^* .

Задача 3. Постройте изоморфизмы групп:

- а) $SL(2, \mathbb{R})$ и $SU(1, 1)$
- б) $SU(2)/(\pm 1)$ и $SO(3)$,
- в)* $SL(2, \mathbb{R})/(\pm 1)$ и $SO_0(2, 1)$.

Задача 4. Выпишите разложение Ивасава для группы $SU(1, 1)$

Задача 5. Выпишите действие элемента $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в пространстве D_χ основной серии. Выведите отсюда асимптотику функций из D_χ при $z \rightarrow \infty$. Получите тот же результат из описания D_χ в однородных функциях

Задача 6. Выпишите действие алгебры Ли $sl(2, \mathbb{R})$ в пространстве D_χ основной серии

Задача 7. Выпишите действие алгебры Ли $su(1, 1)$ в пространстве D_χ основной серии в базисе функций $v_m(g)$, чье ограничение на компактную подгруппу есть $e^{im\varphi}$

Задача 8. Вычислите действие оператора Казимира в пространстве D_χ

Задача 9. Докажите, что конечномерные представления $SL(2, \mathbb{R})$ не унитарны (не унитаризуемы)