Лекция 15.03.17

Определений и формулы

Пусть $G = SL(2,\mathbb{R})$, P - подгруппа верхетреугольных матриц. Одномерные представления $\pi_\chi \ : P \to \mathbb{C}$ - нумеруются парой $\chi = (s, \varepsilon)$, где $s \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$ и задаются формулой:

$$\pi_\chi : \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \to |\lambda|^{s-1} \operatorname{sgn}^\varepsilon(\lambda).$$

Представление основной серии D_χ группы $G = SL(2,\mathbb{R})$ - это индуцированное представление

$$D_\chi = \operatorname{Ind}_P^G \pi_\chi$$

Оно состоит из (C^∞ с естественной топологией) функций $F(x)$ со значениями в $\mathbb{C}$, таких, что

$$F(px) = \pi_\chi(p)F(x) \tag{1}$$

а действие группы задатся правыми сдвигами,

$$T_g F(x) = F(xg)$$

Такие функции через разложение Гаусса определяются своими ограничениями на нижнетреугольных матрицах $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$, что приводит к реализации D_χ в C^∞- функциях $\varphi(z)$ на прямой, удовлетворяющих асимптотическому условию $\varphi(-1/z)|z|^{s-1} \operatorname{sgn}^\varepsilon(z)$ гладка при $z = 0$ с формулой действия

$$T_g\varphi(z) = |bz+d|^{s-1} \operatorname{sgn}^\varepsilon(bz+d)\varphi\left(\frac{az+c}{bz+d}\right), \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Эквивалентная реализация в однородных функциях второй строки (ибо $G/P \sim \mathbb{R}P^1$)

$$f(\bar{x}) := f(\lambda x_1, \lambda x_2) = |\lambda|^{s-1} \operatorname{sgn}^\varepsilon(\lambda) f(x_1, x_2)$$

с действиями правыми сдвигами, $T_g f(\bar{x}) = f(\bar{x}g)$, где использовано умножение вектор строки на матрицу. Ограничивая, согласно разложению Ивасава

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & y \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

функции (1) на компактную подгруппу $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, получаем реализацию в функциях $\psi(\theta)$ с условием $\psi(\theta+\pi) = (-1)^\varepsilon\psi(\theta)$. Связь с "некомпактной" реализацией

$$\psi(\theta) = |\cos\theta|^{s-1} \operatorname{sgn}^\varepsilon(\theta)\varphi(\operatorname{tg}\theta)$$

Для вывода формулы действия в компактной реализации удобно перейти от параметров вектора второй строки $(\sin\theta, \cos\theta)$ к вектору $(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ посредством умножения на матрицу $I = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$(\sin\theta, \cos\theta)I = (e^{i\theta}, e^{-i\theta})$$

Соответственно матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из $SL(2,\mathbb{R})$ сопрягается с помощью I^{-1},

$$I^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

где $\alpha = 1/2(a+d = i(b+c))$, $\beta = 1/2(-a+d+i(b-c))$. Последние образуют группу $SU(1,1)$, изоморфную $SL(2,\mathbb{R})$. Теперь действие в “компактной” реализации естественно пишется в параметрах $SU(1,1)$. Обозначим $\zeta = e^{\theta}$ и $w = e^{2i\theta}$. Тогда при $\varepsilon = 0$ функции из D_χ зависят только от w и

$$T_g\psi(w) = |\bar\alpha + \beta w|^{s-1}\psi\left(\frac{\alpha w + \bar\beta}{\bar\alpha + \beta w}\right), \qquad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$$

При $\varepsilon = 1$ всякая функция из D_χ может быть представлена как $\zeta\psi(w)$ и

$$T_g\zeta\psi(w) = \zeta|\bar\alpha + \beta w|^{s-1}\frac{\alpha + \bar\beta\bar w}{|\bar\alpha + \beta w|}\ \psi\left(\frac{\alpha w + \bar\beta}{\bar\alpha + \beta w}\right)$$

Литература

1. И.М.Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин, Обобщенные функции 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, гл. VII
2. Д.П.Желобенко, А.И.Штерн, Представления групп Ли. глава 8.