Математический анализ

Лектор д.ф.-м.н. В.В.Чепыжов *

Факультет математики ВШЭ, 2017 г. 2 семестр

Лекция 10 (21 февраля 2017)

§1. Полнота тригонометрической системы. Теоремы Вейерштрасса

Из теоремы Фейера следует полнота тригонометрической системы в $L_2[-\pi,\pi]$. Действительно, в силу этой теоремы любая непрерывная функция, для которой $f(-\pi)=f(\pi)$, является пределом равномерно (а значит и в среднем) сходящейся последовательности тригонометрических многочленов. Остается заметить, что непрерывные функции с условием $f(-\pi)=f(\pi)$ всюду плотны в $L_2[-\pi,\pi]$.

Отметим, что теорема Фейера усиливает теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной периодической функции многочленами: эта теорема утверждает, что всякая такая непрерывная функция есть равномерный предел какой-то последовательности тригонометрических многочленов, а теорема Фейера указывает, как построить конкретную обладающую этим свойством последовательность – взять сумму Фейера.

Из теоремы Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной периодической функции тригонометрическими многочленами легко следует и вторая теорема Вейерштрасса:

Теорема 1 *Любая непрерывная функция на отрезке $[a,b]$ равномерно аппроксимируется алгебраическими многочленами.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на $[a,b]$. Положив $t=\frac{x-a}{b-a}t$, то есть $x=\frac{t(b-a)}{\pi}+a$, мы получим функцию $\varphi(t)$ от t, заданную на $[0,\pi]$. Продолжим ее вначале на полуинтервал $[-\pi,0)$, положив $\varphi(-t)=\varphi(t)$, а потом, по периодичности, на всю прямую. Получим непрерывную на всей прямой периодическую функцию. Построим теперь тригонометрический многочлен $T_n(t)$, удовлетворяющий неравенству

$$|T_n(t)-\varphi(t)|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Далее, всякий тригонометрический многочлен разлагается в ряд Тейлора, сходящийся равномерно на любом конечном отрезке. Пусть P_m – такая частичная сумма ряда

*Компьютерный набор и верстка Антон Жевнерчук и Тимур Степанов.

Тейлора для T_n, что

$$|T_n(t) - P_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } 0 \le t \le \pi.$$

Тогда

$$|\varphi(t) - P_m(t)| < \varepsilon \text{ при } 0 \le t \le \pi.$$

Сделав в $P_m(t)$ обратную замену $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$, мы получим многочлен $Q_m(x)$, такой что

$$|f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon \ \forall x \in [a, b].$$

■

Исследуем вопрос о связи гладкости функции со скоростью убывания ее коэффициентов Фурье.

§2. Оценка коэффициентов Фурье гладкой функции

Лемма 1 (о дифференцировании ряда Фурье) *Если непрерывная функция $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, принимающая на концах равные значения (т. е. $f(\pi) = f(-\pi)$), кусочно непрерывно дифференцируема на $[-\pi, \pi]$, то ряд Фурье ее производной может быть получен формальным дифференцированием ряда Фурье самой функции f, т. е. если ряды Фурье f и f' имеют вид*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx} \quad \text{и} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f') e^{ikx},$$

соответственно, то

$$c_k(f') = ik \cdot c_k(f) \ \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Доказательство. Исходя из определения коэффициентов Фурье, интегрированием по частям находим:

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-ikx} |_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot ik \cdot e^{-ikx} dx =$$

$$= 0 + ik \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = ik \cdot c_k(f),$$

поскольку $f(\pi)e^{-ik\pi} - f(-\pi)e^{ik\pi} = \cos(k\pi)\big(f(\pi) - f(-\pi)\big) = 0$ ■

Утверждение 1 ***(о связи гладкости функции со скоростью сходимости ее коэффициентов Фурье)***
Пусть $f \in C^{(m-1)}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ и $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ при $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Если функция f имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ кусочно непрерывную производную $f^{(m)}$ порядка m, то

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)^m c_k(f), \ k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

и

$$|c_k(f)| = \frac{\gamma_k}{k^m} = o\left(\frac{1}{k^m}\right) \text{ при } k \to \infty, \ k \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

причем $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^2 < \infty$.

Доказательство. Соотношение (2) получается в результате m-кратного применения тождества (1):

$$c_k(f^{(m)}) = (ik) \cdot c_k(f^{(m-1)}) = \cdots = (ik)^m c_k(f).$$

Полагаем теперь $\gamma_k = \left|c_k(f^{(m)})\right|$ и применяем неравенство Бесселя к функции $f^{(m)}$:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \left|c_k(f^{(m)})\right|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f^{(m)}(x)\right|^2 dx,$$

из которого и из (2) получаем (3) и $\gamma_k \to 0$ ■

Замечание 1 *В доказательстве Утверждения 1, как и в Лемме 1, вместо условий $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ можно считать, что f – это заданная на всей прямой периодическая функция нужной гладкости.*

Замечание 2 *Если тригонометрический ряд Фурье записывать через функции $\sin kx$ и $\cos kx$, то вместо простых соотношений (2) пришлось бы писать заметно более сложные, смысл которых, однако, будет тот же: при указанных условиях ряд Фурье можно дифференцировать почленно. Что касается оценок коэффициентов $a_k(f), b_k(f)$, то поскольку*

$$a_k(f) = c_k(f) - c_{-k}(f),\ b_k(f) = i\big(c_k(f) - c_{-k}(f)\big),$$

получаем неравенства:

$$|a_k(f)| \le \frac{\alpha_k}{k^m},\ |b_k(f)| \le \frac{\beta_k}{k^m}, k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

причем $\alpha_k = \beta_k = \gamma_k + \gamma_{-k}$ и $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k^2 < \infty$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k^2 < \infty$.

§3. Гладкость функции и скорость сходимости ее ряда Фурье

Теорема 2 *Пусть, как и в Утверждении 1, $f \in C^{(m-1)}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ и $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ при $j = 0, 1, \ldots, m-1$ и f имеет на $[-\pi,\pi]$ кусочно непрерывную производную $f^{(m)}$. Тогда ряд Фурье функции f сходится к f абсолютно и равномерно на $[-\pi,\pi]$, причем отклонение n-й частичной суммы $S_n(x)$ ряда Фурье от $f(x)$ на всем отрезке $[-\pi,\pi]$ имеет оценку*

$$|f(x) - S_n(x)| \le \frac{\varepsilon_n}{n^{m-1/2}},\ \varepsilon_n \to 0+\,. \tag{5}$$

Доказательство. Если непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция удовлетворяет соотношению $f(-\pi) = f(\pi)$ и имеет на этом отрезке хотя бы <u>первую</u> кусочно непрерывную производную, то из оценок (4) следует, что

$$|a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx| \le \frac{\alpha_k + \beta_k}{k} \le \frac{1}{2}\left[(\alpha_k + \beta_k)^2 + \frac{1}{k^2}\right] \le \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \frac{1}{2k^2}.$$

Поскольку ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$ сходятся, на основании мажоритарного признака Вейерштрасса заключаем, что ряд Фурье

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right]$$

функции f сходится абсолютно и равномерно на $[-\pi, \pi]$. Пусть

$$S(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big].$$

По условию функция f кусочна непрерывно дифференцируема на $[-\pi, \pi]$, поэтому она удовлетворяет условиям Дини в каждой точке $[-\pi, \pi]$. Следовательно, на основании Теоремы 1 из Лекции 8 заключаем, что $S(x) = f(x)$.

Теперь оценим отклонение $S_n(x)$ от $f(x)$, используя неравенства (4):

$$|f(x) - S_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \big[a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big]\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_k + \beta_k}{k^m}.$$

По неравенству Коши-Буняковского:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_k + \beta_k}{k^m} \leq \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k)^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}\Big)^{1/2}.$$

Полагаем $x_n = \Big(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k)^2\Big)^{1/2}$ и, учитывая сходимость ряда $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$, заключаем $x_n \to 0$. Далее

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leq \int\limits_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} = \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{1}{n^{2m-1}} \Rightarrow \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}\Big)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \cdot \frac{1}{n^{m-1/2}}.$$

Положим $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \cdot x_n$ и получим (5) ■

Используя Теорему 2, можно еще раз получить аппроксимационную теорему Вейерштрасса, независимо от теоремы Фейера. Действительно, используя равномерную непрерывность функции f на отрезке $[-\pi, \pi]$, аппроксимируем f на этом отрезке с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$ кусочно линейной непрерывной функцией $\varphi(x)$, принимающей на концах те же значения, что и f : $\varphi(-\pi) - \varphi(\pi)$. По Теореме 2 ряд Фурье функции $\varphi(x)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$. Взяв частичную сумму этого ряда, отклоняющуюся от $\varphi(x)$ не более, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, получим тригонометрический многочлен, отклоняющийся от $f(x)$ не более чем на ε.

С помощью Теоремы 2 можно доказать следующее утверждение, дополняющее Лемму 1:

Утверждение 2 *Если функция $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ кусочно непрерывная, то соотношение*

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

после интегрирования превращается в равенство

$$\int\limits_0^x f(t)dt = c_0(f)x + \sum_{-\infty}^{\infty}{}^* \frac{c_k(f)}{ik}(e^{ikx} - 1),$$

где звездочка означает, что в сумме отсутствует член, отвечающий $k = 0$, а сумма понимается как предел симметричных частных сумм $\sum_{k=-n,k\neq 0}^{n}$ и ряд сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt - c_0(f)x \text{ на } [-\pi, \pi].$$

Очевидно, что $F \in C[-\pi, \pi]$ и $F(\pi) = F(-\pi)$, т. к.

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - 2\pi c_0(f) = 0 \quad (c_0(f) - \text{коэффициент Фурье}).$$

Поскольку производная $F'(x) = f(x) - c_0(f)$, то $F(x)$ кусочно непрерывно дифференцируема, и по Теореме 2 ряд Фурье функции F равномерно сходится к F на $[-\pi, \pi]$. По Лемме 1

$$c_k(F) = \frac{c_k(F')}{ik} \text{ при } k \neq 0.$$

Однако $c_k(F') = c_k(f)$ при $k \neq 0$.

Записываем теперь равенство

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(F)e^{ikx}$$

в терминах функции f и учитываем, что $F(0) = 0$. Получаем

$$\int\limits_0^x f(t)dt - c_0(f)x = \sum_{-\infty}^{\infty}{}^* \frac{c_k(f)}{ik}(e^{ikx} - 1).$$

■

<u>**Вывод:**</u> ряды Фурье кусочно непрерывных функций можно интегрировать формально, при этом получаются равномерно сходящиеся ряды Фурье для первообразных.

Лекция 11. 28 февраля 2017

Применение рядов Фурье

§1. Изопериметрическое неравенство

Рассмотрим классическую геометрическую задачу: среди всех замкнутых кривых на плоскости, имеющих длину L, найти кривую, ограничивающую наибольшую площадь.

Теорема 1 *Для любой кривой на плоскости выполнено соотношение*

$$4\pi S \leq L^2. \tag{1}$$

Доказательство. Будем предполагать, что рассматриваемая кривая является гладкой и она задана в параметрическом виде $x = \varphi(s), y = \psi(s)$, где s – натуральный параметр, т. е. длина дуги вдоль кривой, а функции $\varphi, \psi \in C^1[0, L]$.

Условие замкнутости кривой: $\varphi(0) = \varphi(L), \psi(0) = \psi(L)$.

Перейдем от параметра s к параметру $t = 2\pi \cdot \frac{s}{L} - \pi$, который меняется от $-\pi$ до π, и будем считать, что кривая задана в параметрическом виде

$$x = x(t), y = y(t), -\pi \leq t \leq \pi,$$

причем $x(-\pi) = x(\pi), y(-\pi) = y(\pi)$.

Уравнения кривой запишем в виде одной комплексной функции:

$$z = z(t), -\pi \leq t \leq \pi,$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$, причем $z(-\pi) = z(\pi)$.

Заметим, что $|z'(t)|^2 = |x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, а значит, что при нашем выборе параметра

$$|z'(t)|^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}. \tag{2}$$

Заметим, что

$$\overline{z}z' = (x - iy)(x' + iy') = (xx' + yy') + i(xy' - x'y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)' + i(xy' - x'y).$$

Это соотношение позволяет записать выражение для площади, ограниченной кривой $\big(x(t), y(t)\big)$, в комплексном виде:

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(xy' - yx')(t)dt = \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi} z'(t)\overline{z}(t)dt. \tag{3}$$

Разложим функцию $z(t)$ в ряд Фурье:

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \text{ тогда } c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} z(t)e^{-ikt}dt, \; z'(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikt}.$$

Равенства (2) и (3) означают, в частности, что

$$\frac{1}{2\pi}\|z'\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |z'(t)|^2\, dt = \frac{L^2}{4\pi^2} \quad (\text{норма в } L_2\big([-\pi,\pi],\mathbb{C}\big)),$$

$$\frac{1}{2\pi}\langle z', z\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} z'(t)\overline{z}(t)dt = \frac{i}{\pi}S \quad (\text{скалярное произведение в } L_2\big([-\pi,\pi],\mathbb{C}\big)).$$

В терминах коэффициентов Фурье эти соотношения принимают вид:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |kc_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |z'(t)|^2\, dt = \frac{L^2}{4\pi^2},$$

$$i\sum_{-\infty}^{\infty} k|c_k|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} ikc_k\overline{c_k} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} z'(t)\overline{z}(t)dt = \frac{i}{\pi}S \Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} k\,|c_k|^2 = \frac{S}{\pi}.$$

Здесь мы воспользовались равенством Парсеваля для квадрата вектора и для скалярного произведения двух векторов.

Следовательно,

$$L^2 - 4\pi S = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} (k^2 - k)\,|c_k|^2\,.$$

Правая часть этого равенства неотрицательна и обращается в ноль только когда выполнены условия $c_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, 1$.

Итак, доказано неравенство (1), а заодно установлено уравнение кривой, для которой достигается равенство:

$$z(t) = c_0 + c_1 e^{it},\ -\pi \leq t \leq \pi.$$

Это параметрическое уравнение окружности с центром c_0 и радиусом $|c_1|$ ■

Теперь мы займемся применением рядов Фурье для решений некоторых уравнений математической физики, которые являются дифференциальными уравнениями с частными производными.

§2. Решение первой краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности

Обозначим $Q = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ – открытый прямоугольник в $\mathbb{R}^2$.

Задача *Найти функцию* $u(x,t)$, $(x,t) \in Q$, $u \in C(\overline{Q})$, $\exists \frac{\partial u}{\partial t} \in C(Q)$, $\exists \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(Q)$, *которая удовлетворяет уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,l]\ (\varphi \in C[0,l]), \tag{2}$$

и граничному условию

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t \in [0,T]. \tag{3}$$

Приведенная задача является математической моделью физической задачи распространения тепла в тонком однородном стержне, концы которого ($x = 0,\ x = l$) поддерживаются при нулевой температуре. При этом известно изначальное распределение температуры в стержне (функция $\varphi(x),\ x \in [0,l]$). Число a – коэффициент температуропроводности.

Рассмотрим метод разделения переменных или метод Фурье решения этой задачи.

Мы не будем сразу указывать условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi(x)$, а сделаем это позже.

Шаг 1. Разделяются переменные, т. е. мы ищем частные решения уравнения (1) (не равные тождественно нулю) в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной независимой переменной:

$$u(x,t) = Y(x) \cdot Z(t). \tag{4}$$

Подставим в (1), получим равенство:

$$Z'(t)Y(x) = a^2Y''(x)Z(t).$$

Делим на a^2YZ:

$$\frac{Z'(t)}{a^2Z(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)}.$$

Поскольку левая часть не зависит от x, а правая – от t, то обе они равны какой-то постоянной λ:

$$\frac{Z'(t)}{a^2Z(t)} = \frac{Y''(x)}{Y(x)} = \lambda.$$

Таким образом, функции Z и Y должны удовлетворять уравнениям

$$Y''(x) = \lambda Y(x) \text{ и } Z'(t) = \lambda a^2 Z(t).$$

Решив эти два уравнения и перемножив их решения, получим решение вида (4) для (1).

Шаг 2. Частные решения должны удовлетворять граничному условию (3):

$$Y(0)Z(t) = Y(l)Z(t) = 0\ \forall t \geq 0 \Rightarrow Y(0) = Y(l) = 0.$$

Следовательно, функция $Y(x)$ должна удовлетворять следующему уравнению и граничным условиям:

$$Y''(x) = \lambda Y(x),\ x \in [0,l], \tag{5}$$

$$Y(0) = Y(l) = 0. \tag{6}$$

Задача (5), (6) называется задачей Штурма-Лиувилля или спектральной задачей. Она состоит в нахождении тех значений λ, для которых существуют нетривиальные решения задачи (5), (6). Такие λ называются собственными значениями, а соответствующие им функции $Y(x)$ – собственными функциями задачи (5), (6).

Если $\lambda > 0$, то общее решение (5) имеет вид:

$$Y(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Условия (6) принимают вид

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \cdot e^{\sqrt{\lambda}l} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Следовательно, положительные λ не могут быть собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля.

Если $\lambda = 0$, то $Y''(x) = 0$, т. е. $Y(x)$ – это линейная функция. Поскольку она равна нулю в двух точках ($Y(0) = Y(l) = 0$), то $Y \equiv 0$.

Итак, только отрицательные λ могут быть собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля.

Пусть $\lambda = -\mu^2$. Тогда общее решение уравнения (5):

$$Y(x) = c_1 \cdot \sin \mu x + c_2 \cdot \cos \mu x.$$

Из условия $Y(0) = 0$ следует, что $c_2 = 0$. Условия $Y(l) = 0$ записывается в виде

$$c_1 \cdot \sin \mu l = 0.$$

Так как $Y(x)$ – нетривиальное решение, $c_1 \neq 0$. Следовательно, $\mu l = k\pi \Rightarrow \mu = \frac{k\pi}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$, и существует счетное множество собственных значений

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2},\ k = 1, 2, \ldots.$$

Соответствующие им собственные функции

$$Y_k(x) = \sin \mu_k x,\ \text{где } \mu_k = \frac{k\pi}{l},\ k = 1, 2, \ldots$$

Итак, второй шаг завершается нахождением всех собственных значений и собственных функций задачи (5), (6).

Шаг 3. Требуется решить полученное уравнение для $Z(t)$. Для каждого $\lambda_k = -\mu_k^2$ уравнение имеет вид

$$z'(t) = -a^2\mu_k^2 z(t).$$

Его решения:

$$z_k(t) = c_k \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}.$$

Мы нашли все решения уравнения (1) вида $Y(x)Z(t)$, которые удовлетворяют граничным условиям (3):

$$u_k(x,t) = c_k \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t} \sin \mu_k x.$$

Шаг 4. Ищем решение всей задачи (1), (2), (3) в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t} \sin \mu_k x. \tag{7}$$

Из начальных условий при $t = 0$ находим

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \sin \mu_k x,\ \ \mu_k = \frac{k\pi}{l},\ \ k = 1, 2, \ldots .$$

Это ряд Фурье функции $\varphi(x)$ по полной ортогональной системе $\{\sin \mu_k x\}$. Значит, коэффициент c_k находится по формуле

$$c_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(s) \sin(\mu_k s) ds. \tag{8}$$

Шаг 5. Теперь нужно обосновать, что ряд (7) сходится. Кроме того, нужно показать, что сходятся и ряды, полученные из него почленным дифференцированием, один раз по t, два раза по x. Наконец, останется показать, что это действительно решения исходной задачи для уравнения теплопроводности.

Лекция 12. 7 марта 2017

Рассмотрим 1-ую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x,t), \quad (x,t) \in Q = (0,l) \times (0,T), \tag{1}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), x \in [0,\, l]\,, \tag{2}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, t \in [0,\, T]\,. \tag{3}$$

Её формальное решение даётся формулой:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t} \cdot \sin \mu_k x, \qquad \text{где } \mu_k = \frac{k\pi}{l}, k = 1, 2, ..., \tag{4}$$

где

$$c_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(s) \sin \mu_k s\ ds \quad \text{– коэффициент Фурье } \varphi. \tag{5}$$

Покажем, что при определенных условиях на функцию $\varphi(x)$ ряд (4) представляет собой классическое решение рассматриваемой задачи, т.е. $u(x,t) \in C(\overline{Q})$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(Q)$, и удовлетворяет (1), (2), (3).
Отметим, что необходимым условием существования классического решения является условие согласования: $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Теорема 1 *Пусть $\varphi(x)$ непрерывна на $[0,\, l]$, имеет кусочно-непрерывную производную на $[0,\, l]$ и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда существует классическое решение задачи (1) (2) (3), представимое рядом (4) с коэффициентами (5). Это решение единственно.*

Доказательство. Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (3), т.к. им удовлетворяют все члены ряда (4). Начальное условие (2) так же выполнено, т.к. при $t = 0$ ряд (4) переходит в тригонометрический ряд Фурье функции $\varphi(x)$, удовлетворяющий условиям разложимости в тригонометрический ряд Фурье на $[0,\, l]$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \sin(\mu_k x).$$

Осталось доказать, что ряд (4) сходится и функция $u(x,t)$, представимая этим рядом:
1. непрерывна в $\overline{Q}$;
2. имеет в Q непрерывные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;
3. удовлетворяет уравнению (1).

Докажем эти утверждения. Оценим общий член ряда (4):

$$\left| c_k e^{-a^2\mu_k t} \sin(\mu_k x) \right| \le |c_k| \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}.$$

Если будет доказана сходимость числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|$, то по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов, ряд (4) будет равномерно сходиться в $\overline{Q}$ и его сумма будет непрерывной функцией. Докажем это. Имеем

$$c_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(s)\sin\mu_k s\; ds = -\frac{2}{l}\cdot\frac{1}{\mu_k}\int\limits_0^l \varphi(s)\cdot d(\cos\mu_k s) =$$

$$= -\frac{2}{l}\cdot\frac{1}{\mu_k}\varphi(s)\cos\mu_k s\Big|_0^l + \frac{2}{k\pi}\int\limits_0^l \varphi'(s)\cos\mu_k s\; ds = \frac{l}{k\pi}c_k'.$$

Здесь при интегрировании по частям мы учли граничное условие $\varphi(0)=\varphi(l)=0$. Через c_k' обозначили коэффициенты Фурье функции $\varphi'(x)$ по ортогональной системе $\{\cos\mu_k x\}$.

Согласно неравенству Бесселя ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k'|^2$ сходится. Воспользуемся неравенством

$$|c_k| = \frac{l}{k\pi}\,|c_k'| \le \frac{l}{2\pi}\left(|c_k'|^2 + \frac{1}{k^2}\right).$$

Из последнего неравенства вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|$. Следовательно, функциональный ряд (4) равномерно сходится в $\overline{Q}$, его сумма $u(x,t)$ непрерывная функция, причем

$$u(x,t)\to\varphi(x) \text{ при } t\to 0, \quad u(x,t)\to 0 \text{ при } x\to 0+ \text{ или } x\to l-0.$$

Теперь формально продифференцируем ряд (4) один раз по t и 2 раза по x и получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot c_k\cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}\cdot\sin\mu_k x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot c_k\cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}\cdot\sin\mu_k x.$$

Покажем, что при $t\ge\tau>0$ эти ряды равномерно сходятся.

Поскольку функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0,\,l]$, то она ограничена:

$$\exists M>0:\quad |\varphi(x)|\le M\quad \forall x\in[0,\,l]\,.$$

Следовательно,

$$|c_k| = \left|\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(s)\sin\mu_k s\; ds\right| \le \frac{2}{l}\int\limits_0^l M\; ds \le 2M.$$

Поэтому при $t\ge\tau>0$ получим оценку

$$\left|k^2\cdot c_k\cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}\cdot\sin\mu_k x\right| \le 2M\cdot k^2\cdot e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2\tau}.$$

Исследуем на сходимость числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\alpha k^2}, \text{ где } \alpha = \left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \tau.$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, т.к.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \cdot e^{-\alpha(2k+1)} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Тогда по признаку Вейерштрасса ряды, полученные формальным дифференцированием, сходятся равномерно. Следовательно, ряд (4) можно почленно дифференцировать один раз по t и 2 раза по x при $t \geq \tau > 0$, или, в силу произвольности τ, в области Q. При этом суммы полученных равномерно сходящихся рядов $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывны в Q. Осталось заметить, что частичная сумма ряда (4) удовлетворяет уравнению (1), т.к. оно линейно, т.е. сумма решений – решение. Следовательно и сама функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1).

Докажем единственность классического решения. Если у задачи есть два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, то их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ также является решением уравнения (1) с нулевым начальным условием:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in Q, \tag{6}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,\, l]\,, \tag{7}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [0,\, T]\,. \tag{8}$$

Покажем, что $u(x,t) \equiv 0$ в $(x,t) \in Q$.
Рассмотрим коэффициенты Фурье функции $u(x,t)$ при $t > 0$

$$c_k(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l u(x,t) \cdot \sin \mu_k x \; dx.$$

Умножим теперь уравнение (6) на $\sin \mu_k x$ и проинтегрируем по $[0,\, l]$. Слева получим

$$\int\limits_0^l \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \sin \mu_k x \; dx = \frac{d}{dt} \int\limits_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \; dx = \frac{l}{2} \cdot c_k'(t).$$

Справа проинтегрируем по частям 2 раза:

$$\int\limits_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \sin \mu_k x \; dx = \frac{\partial u}{\partial x} \sin \mu_k x \Big|_0^l - \mu_k \int\limits_0^l \frac{\partial u}{\partial x}(u,t) \cdot \cos \mu_k x \; dx =$$

$$= -\mu_k \cdot \int\limits_0^l \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \cos \mu_k x \; dx =$$

$$= -\mu_k \cdot u(x,t) \cdot \cos \mu_k x \Big|_0^l + \mu_k^2 \cdot \int\limits_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \; dx = -\frac{l}{2} \cdot c_k(t).$$

Следовательно, функция $c_k(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dt}c_k(t) = -a^2\mu_k^2 c_k(t) \quad \Rightarrow \quad c_k(t) = c_k(0)e^{-a^2\mu_k^2 t}.$$

Напомним, что, функция $u(x,t) = 0$ при $t = 0$, следовательно, $c_k(0) = 0$. Значит, $c_k(t) \equiv 0$ при всех $t \in [0,\, T]$. А если у непрерывной функции все коэффициенты Фурье равны нулю, то она тождественно равна нулю. Значит, $u(x,t) = 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$. ■

Перепишем решение задачи (4) в следующем виде, заменив коэффициенты c_k их значениями (5):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(s) \sin\mu_k x \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}\ ds.$$

Рассмотрим $t \geq \tau > 0$. При этом можно поменять местами интегрирование и суммирование:

$$u(x,t) = \int\limits_0^l \left(\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\mu_k x \cdot \sin\mu_k s \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t} \right) \varphi(s)\ ds,$$

так как в этой части прямоугольника Q

$$e^{-a^2\mu_k t} \leq e^{-a^2\mu_k \tau} = e^{-a^2\frac{\pi^2}{l^2}k^2\tau} \leq \frac{M_n}{k^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

для некоторого M_n, и, следовательно, ряд

$$\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\mu_k x \cdot \sin\mu_k s \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}$$

сходится равномерно при $\tau \leq t \leq T, \quad x, s \in [0,\, l]$.

Сумма этого ряда называется функцией Грина $G(x,s,t)$ уравнения теплопроводности (точнее, первой краевой задачи уравнения теплопроводности).

$$G(x,s,t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sin\mu_k x \cdot \sin\mu_k s \cdot e^{-a^2\mu_k^2 t}, \quad x \in [0,l],\ s \in [0,l],\ t > 0.$$

Так как в любой фиксированной точке прямоугольника Q значение $t > 0$ и, следовательно, справедливы оценки (9), то всюду в этом прямоугольнике функция Грина – бесконечно дифференцируемая функция, которая, (при любом фиксированном s), очевидно, удовлетворяет уравнению (1) при $t > 0$ и граничному условию $G(0,s,t) = G(l,s,t)$.

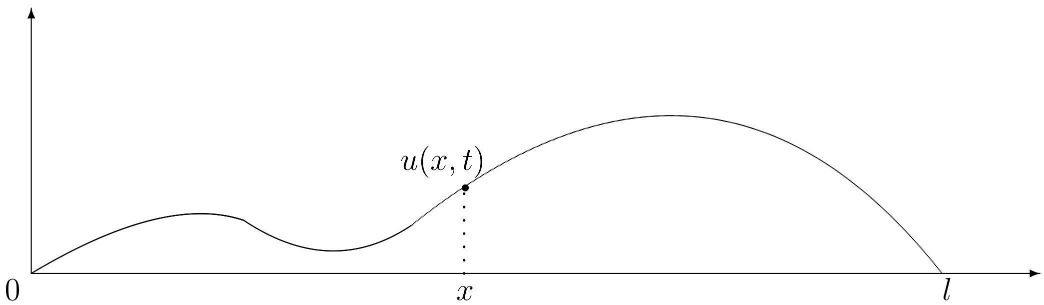
Таким образом, при указанных в теореме условиях на начальную функцию $\varphi(x)$ решение $u(x,t)$ задачи в Q (т.е., при $t > 0$) является бесконечно дифференцируемой функцией, которая записывается в виде интеграла

$$u(x,t) = \int\limits_0^l G(x,s,t)\varphi(s)\ ds$$

при $t = 0$ имеем $u(x,0) = \varphi(x)$.

Лекция 13 (10 марта 2017)

§1. Первая краевая задача для уравнения упругих колебаний струны



Предполагается, что струна – это гибкая нить, совершающая колебания в направлении, перпендикулярном оси x. Струна имеет длину l и её концы закреплены. Пусть, как и раньше $Q = \{(x,t),\ x \in (0,l),\ t \in (0,T)\}$.

Задача *Требуется найти функцию $u(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, у которой $\exists\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in C(Q)$ и которая удовлетворяет:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in Q, \qquad \underline{\textit{уравнение}} \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad x \in (0,l), \qquad \underline{\textit{начальные условия}} \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \qquad \underline{\textit{граничные условия (закрепленные концы)}} \tag{3}$$

Задача (1), (2), (3) моделирует упругие колебания струны с закрепленными концами. Коэффициент a имеет размерность скорости. Физический смысл – скорость распространения бегущих волн в струне.

Опишем этапы построения решения $u(x,t)$ задачи (1)-(3).

Шаг 1. Разделение переменных. Ищем частные решения вида: $u(x,t) = y(x) \cdot z(t)$. Подставляем в уравнение: $z''(t) \cdot y(x) = a^2 z(t) \cdot y''(x)$.

$$\frac{z''(t)}{a^2 z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \lambda = const.$$

Шаг 2. Совпадает с шагом 2 метода Фурье решения уравнения теплопроводности. Решается задача Штурма-Лиувилля

$$y''(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y(l) = 0. \tag{4}$$

Её решение имеет вид

$$\lambda = -\mu_k^2,\ \mu_k = \frac{k\pi}{e},\ y_k(x) = \sin \mu_k x.$$

Мы нашли все собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (4).

Шаг 3. Решаем уравнение для второго сомножителя:

$$z''(t) + a^2\mu_k^2 z(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$z_k(t) = C_k \cdot \cos(\mu_k at) + D_k \cdot \sin(\mu_k at).$$

Тем самым найдены все решения уравнения (1) вида $y(x)z(t)$. Любая линейная комбинация таких функций $u_k(x,t)$, очевидно, также удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям (3). Но такая (конечная) линейная комбинация, может не удовлетворять начальному условию (2) при произвольных гладких функциях φ и ψ.

Шаг 4. Решение задач (1), (2), (3) ищется в виде бесконечного ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t), \qquad \text{где} \tag{5}$$

$$u_k(x,t) = (C_k \cos \mu_k at + D_k \sin \mu_k at). \tag{6}$$

Здесь C_k и D_k – некоторые коэффициенты, которые необходимо определить по начальным данным задачи φ и ψ.

Сначала будем действовать формально, не заботясь о сходимости рядов. Подставим в этот ряд начальные условия при $t = 0$ (для второго условия необходимо взять производную по времени).

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \sin \mu_k x = \varphi(x), \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a\mu_k D_k \cdot \sin \mu_k x = \psi(x). \tag{8}$$

Эти равенства представляют собой разложение функций φ и ψ в ряд Фурье по ортогональной системе $\{\sin \mu_k x\}$. Поэтому, находим коэффициенты Фурье:

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi \sin \mu_k x \; dx, \tag{9}$$

$$a\mu_k D_k = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x) \sin \mu_k x \; dx, \qquad \text{т.е.}$$

$$D_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^l \psi(x) \sin \mu_k x \; dx. \tag{10}$$

Итак, мы нашли формулу (5) и (6) для решения задачи (1), (2), (3), в которой коэффициенты C_k и D_k определяются по формулам (9) и (10).

Шаг5. Обоснование полученных формул.

Теорема 1 *Пусть функция* $\varphi(x) \in C^3\,[0,\, l]$*, причем*

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \tag{11}$$

а функция $\psi(x) \in C^2\,[0,\, l]$*, причем*

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \tag{12}$$

Тогда функция $u(x,t)$*, определяемая рядом (5), в котором коэффициенты* C_k *и* D_k *определены в (9) и (10), принадлежит классу* $C^2(\bar{Q})$*, удовлетворяет уравнению (1), начальным условиям (2) и граничным условиям (3). Такая функция единственная.*

Доказательство. (в кратце)

Интегрируем по частям три раза интеграл из формулы (9) с учётом условий (11) на функцию φ:

$$C_k = -\frac{2}{l} \cdot \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \cdot \int\limits_0^l \varphi'''(x) \cos \mu_k x\; dx = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{p_k}{k^3}, \tag{13}$$

где p_k – коэффициент Фурье функции $\psi'''(x)$ по ортогональной системе $\{\cos \mu_k x\}$.

Аналогично, интегрируем два раза по частям в формуле (10) с учётом условий (12) на ψ:

$$D_k = -\frac{2}{la} \cdot \left(\frac{l}{\pi k}\right)^3 \cdot \int\limits_0^l \psi''(x) \sin \mu_k x\; dx = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{q_k}{k^3}, \tag{14}$$

где q_k – коэффициенты Фурье функции $\psi''(x)$ по ортогональной системе $\{\sin \mu_k x\}$.

Поскольку функции φ''' и ψ'' непрерывны на отрезке $[0,\, l]$, то они принадлежат $L_2\,[0,\, l]$ и по неравенству Бесселя сходятся ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 \le \frac{2}{l} \int\limits_0^l \left[\varphi'''(x)\right]^2\; dx; \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k^2 \le \frac{2}{l} \int\limits_0^l \left[\psi''(x)\right]^2\; dx \tag{15}$$

(здесь имеем даже равенства Парсеваля). Подставим (13) и (14) в ряд (5) и получим:

$$u(x,t) = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(p_k \cdot \sin a\mu_k t + q_k \cdot \cos a\mu_k t\right) \sin \mu_k x. \tag{16}$$

Этот ряд при любом $(x,t) \in \overline{Q}$ мажорируется сходящимся числовым рядом:

$$\frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(|p_k| + |q_k|\right),$$

Поэтому ряд (16) в силу признака Вейерштрасса сходится абсолютно и равномерно в $\overline{Q}$. Следовательно, его сумма непрерывна в $\overline{Q}$.

Теперь покажем возможность двукратного почленного дифференцирования ряда (5) (или, что тоже самое, ряда (16)) по переменным x и t. Для этого покажем, что ряды, полученные из (16) двухразовым дифференцированием сходятся равномерно в $\overline{Q}$. Формально дифференцируем и получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{l}{\pi}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(p_k \cdot \sin(a\mu_k t) + q_k \cdot \cos(a\mu_k t)\right) \sin \mu_k x, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{la^2}{\pi}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(p_k \cdot \sin(a\mu_k t) + q_k \cdot \cos(a\mu_k t)\right) \sin \mu_k x. \tag{18}$$

Оба этих ряда, при любом $(x,t) \in \overline{Q}$, мажорируется рядом:

$$c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|p_k| + |q_k|).$$

Сходимость последнего ряда следует из очевидных оценок:

$$\frac{1}{k} |p_k| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + |p_k|^2\right), \quad \frac{1}{k} |q_k| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + |p_k|^2\right).$$

Теперь опять на основании признака Вейерштрасса ряды (17) и (18) абсолютно и равномерно сходятся. Следовательно, функции $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$ непрерывны в $\overline{Q}$. Подставляя (17) и (18) в уравение (1) убеждаемся, что это решение, которое удовлетворяет (2) и (3).

Единственность решения задачи доказывается аналогично единственности решения уравнения теплопроводности исходя из однозначного восстановления непрерывных функций по их коэффициентам Фурье. ■

§2. Решение уравнения вынужденных колебаний упругой струны

Рассматривается следующая

Задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0, \quad x \in (0,l), \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{3}$$

Здесь $f(x,t)$ – плотность внешней силы, которая зависит x и t.

Решение задачи (1), (2), (3) будем искать в виде ряды Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \cdot \sin \mu_k(x). \tag{4}$$

Здесь, как всегда, $\sin \mu_k x$ – решение задачи Штурма-Лиувилля. Функции

$$p_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,t) \sin \mu_k x \ dx$$

являются коэффициентами Фурье искомого решения $u(x,t)$, которые следует определить.

Будем предполагать, что $f(x,t) \in C(\overline{Q})$, причем

$$\exists\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,t) \in C(\overline{Q}) \quad \text{и} \quad f(0,t) = f(l,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(l,t) = 0. \tag{5}$$

Разложим (известную) функцию $f(x,t)$ в ряд Фурье по переменной x:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \cdot \sin \mu_k x, \quad \text{где} \quad q_k(x) = \frac{1}{2l} \int\limits_0^l f(x,t) \cdot \sin \mu_k x\ dx. \tag{6}$$

Если правую часть этого равенства проинтегрировать по частям 3 раза и воспользоваться условиями (5), то можно получить, что

$$|q_k| \le \frac{M}{k^3}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{7}$$

(внеинтегральные члены обратятся в нуль в силу граничных условий, наложенных на функцию $f(x,t)$).

Будем предполагать, что решение $u(x,t) \in C^2(\overline{Q})$. Обе части уравнения (4) умножим на $\sin \mu_k x$ и проинтегрируем по x от 0 до l:

$$\int\limits_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \sin \mu_k x\ dx = a^2 \cdot \int\limits_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \mu_k x\ dx + \frac{l}{2} \cdot q_k(t). \tag{8}$$

Интеграл в левой части допускает перестановку операций дифференцирования и интегрирования, поэтому он равен

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int\limits_0^l u(x,t) \sin \mu_k x\ dx \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{l}{2} \cdot p_k(t) \right).$$

Интеграл в правой части (8) проинтегрируем по частям 2 раза:

$$\int\limits_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \cdot \sin \mu_k x\ dx = \sin \mu_k x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^l - \int\limits_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \mu_k \cdot \cos \mu_k x\ dx =$$

$$= -u(x,t) \cdot \cos \mu_k x \Big|_0^l - \int\limits_0^l \mu_k^2 \cdot u(x,t) \sin \mu_k x\ dx = -\mu_k^2 \cdot \frac{l}{2} p_k(t).$$

Внеинтегральные члены первый раз равны нулю, т.к. $\sin \mu_k x = 0$ при $x = 0, l$. А во второй раз они равны нулю в силу граничных условий (3).

Следовательно, функция $p_k(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2}{dt^2} p_k(t) = -\mu_k^2 \cdot p_k(t) + q_k(t).$$

Из условий (2) находим начальные условия:

$$p_k(0) = 0, \quad \frac{d}{dt}p_k(0) = 0. \tag{9}$$

Решение задачи Коши (8), (9) получается по формуле:

$$p_k(t) = \frac{1}{a\mu_k}\int\limits_0^t \sin\left(a\mu_k \cdot (t-s)\right) q_k(s)\ ds \tag{10}$$

Ее можно проверить прямой подстановкой в уравнение.

В итоге построено формальное решение задачи (1), (2), (3) в виде ряда (4), в котором коэффициенты $p_k(t)$ вычисляются по формуле (10).

Теорема 2 *При выполнении условий (5) существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (1), (3), (3), $u \in C^2(\overline{Q})$. Это решение записывается в виде ряда (4), где коэффициенты $p_k(t)$ и $q_k(t)$ определяются по формулам (6) и (10).*

Доказательство. По построению функция $u(x,t)$ сумма ряда (4) формально удовлетворяет уравнению, начальным и граничным условиям. Действительно,

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(0) \cdot \sin \mu_k x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k'(0) \cdot \sin \mu_k x = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(p''(t)\sin\mu_k x + a^2\mu_k^2 p_k(t)\sin\mu_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin\mu_k x = f(x,t).$$

Поэтому, доказательство сводится к проверке того, что ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t) \cdot \sin \mu_k x$$

и ряды, полученные его однократным и двукратным дифференцированием по t и x, равномерно сходятся в $\overline{Q}$.

Для равномерной сходимости упомянутых рядов достаточно получить оценку их коэффициентов. Напомним, что $\mu_k = \frac{k\pi}{l}$. Поэтому из оценки (7) и из формулы (10) получаем следующие неравенства:

$$|p_k(t)| \le \frac{M_1}{k^4}, \quad |p_k'(t)| \le \frac{M_2}{k^3}, \quad |p_k''(t)| \le \frac{M_2}{k^2},$$

Из которых получается равномерная сходимость всех нужных рядов. ∎

Лекция 14 (14 марта 2017)

§1. Задача Штурма–Лиувилля

Рассмотрим более общее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u, \quad x \in [0, l],$$

или уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u, \quad x \in [0, l].$$

Дополним эти уравнения граничными условиями:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Решая это уравнение методом разделения переменных, т.е. ища частные решения вида

$$u(x, t) = Y(x)Z(t)$$

приходим к следующей задаче на <u>собственные значения</u>:

$$\begin{matrix} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda y(x), \\ y(0) = y(l) = 0. \end{matrix} \qquad (1)$$

Можно в (1) рассмотреть более общие граничные условия:

$$\alpha y'(0) + \beta y(0) = 0, \quad \gamma y'(l) + \delta y(l) = 0,$$

где

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \quad \gamma^2 + \delta^2 \neq 0.$$

Задача (1) называется <u>задачей Штурма-Лиувилля</u>: Требуется найти все числа $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых существуют ненулевые решения уравнения (1), а также необходимо найти все такие решения.

Обычно предполагается, что

$$p \in C^1[0, l], q \in C[0, l], \quad p(x) \neq 0 \ \forall x \in [0, l] \quad \text{(условие “эллиптичности”)}.$$

Для определенности будем считать, что $p(x) > 0$.

С помощью замены независимой переменной $\xi = \int\limits_0^x p(x)^{-1/2}dx$ и неизвестной функции $z = p^{1/2}(x)y$ задача (1) сводится к более простой задаче, в которой $p(x) \equiv 1$. (Проверьте это!) Поэтому, вместо (1) будем изучать задачу:

$$\begin{matrix} -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \\ y(0) = y(l) = 0. \end{matrix} \qquad (2)$$

Мы будем считать, что $q(x) \geqslant 0$. Это не является ограничением, так как можно добиться выполнения этого неравенства, прибавив к λ некоторую фиксированную константу. При $q \equiv 0$ мы уже знаем решение задачи (2):

$$y(x) = \sin \mu_n x, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

§2. Свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля

Введем оператор Штурма-Лиувилля

$$L = -\frac{d}{dx^2} + q(x),$$

который является линейным (неограниченным) оператором в пространстве $L_2[0,l]$. Его область определения $\mathcal{D}_L$ состоит из функций $v(x) \in C^2[0,l]$, для которых $v(0) = v(l) = 0$.

Задача Штурма-Лиувилля состоит в нахождении всех собственных значений и собственных функций оператора L :

$$Ly = \lambda y, \quad y \in \mathcal{D}_L.$$

Сформулируем и докажем ряд свойств этого оператора.

Утверждение 3 *Оператор L симметричен, т. е.*

$$(Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{D}_L,$$

где $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – обозначает скалярное произведение в $L_2[0,l]$.

Доказательство.

$$(Lv_1, v_2) - (v_1, Lv_2) = \int\limits_0^l (-v_1^{''} v_2 + v_1 v_2^{''}) dx =$$

$$= \int\limits_0^l \frac{d}{dx}(-v_1^{'} v_2 + v_1 v_2^{'}) dx = (-v_1^{'} v_2 + v_1 v_2^{'})|_0^l = 0$$

в силу граничных условий. ∎

Утверждение 4 *Оператор L положителен и все его собственные значения положительны.*

Доказательство.

$$(Lv, v) = \int\limits_0^l (-v^{''} v + q(x) v^2) dx =$$

$$= \int\limits_0^l ((v^{'}(x))^2 + q(x) v^2(x)) dx > 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}_L,\ v \neq 0.$$

Здесь мы применили интегрирование по частям.

Поэтому, если $Lv = \lambda v$, то $\lambda(v,v) = (Lv, v) > 0$ при $v \neq 0$, т.е. $\lambda > 0$. ∎

Утверждение 5 *Все собственные функции с разными собственными значениями ортогональны в $L_2[0, l]$.*

Доказательство. Пусть
$$Lv_1 = \lambda_1 v_1, \quad Lv_2 = \lambda_2 v_2.$$
Тогда
$$\lambda_1(v_1, v_2) = (Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2) = \lambda_2(v_1, v_2).$$
Поэтому, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(v_1, v_2) = 0$.
■

Утверждение 6 *Все собственные значения являются однократными, т.е., все собственные подпространства одномерны.*

Доказательство. Действительно, по теореме единственности любое решение ОДУ вида
$$y^{''} + a(x)y^{'} + b(x)y = 0,$$
которое обращаются в нуль при $x = x_0$, должно быть пропорционально (единственному) решению этого уравнения с начальными условиями
$$y(x_0) = 0, y^{'}(x_0) = 1.$$

■

Сформулируем и докажем теорему Штурма.

Теорема 1 (Штурм) *Пусть даны два уравнения*
$$-y'' = q_1(x)y, \tag{1}$$
$$-z'' = q_2(x)z, \quad \text{причем } q_1(x) \geqslant q_2(x). \tag{2}$$
Пусть их решения $y(x)$ и $z(x)$ определены на отрезке $[a, b]$, причем $z(a) = z(b) = 0$ и $z(x)$ не тождественный ноль. Тогда

ЛИБО на интервале (a, b) найдется точка x_0, где $y(x_0) = 0$,

ЛИБО $q_1(x) \equiv q_2(x)$ на $[a, b]$ и $y(x) = Cz(x)$, $C = const$.

Доказательство. Можно считать, что a и b – это соседние нули функции z, т.е. $z(x) > 0$ при $x \in (a, b)$. (Нули этой функции не могут сгущаться, т.к. в точке сгущения x^* будем иметь $z(x^*) = 0$ и $z'(x^*) = 0$, но $z(x)$ – это решение обыкновенного дифференциального уравнения (2) второго порядка и по теореме единственности $z(x) \equiv 0$). Тогда $z'(a) > 0$ и $z'(b) < 0$ (опять по теореме единственности!).

Если функция $y(x)$ не обращается в ноль на (a, b), то можно считать, что $y(x) > 0$ на (a, b). Рассмотрим определитель Вронского
$$W(x) = y(x)z'(x) - y'(x)z(x).$$

Дифференцируем его:

$$\frac{d}{dx}W(x) = y(x)z''(x) - y''(x)z(x) =$$
$$= (q_1(x) - q_2(x))\, y(x)z(x) \geqslant 0,\ \forall x \in [a,b].$$

Интегрируем по $[a,b]$ и получаем, что

$$W(b) - W(a) \geqslant 0.$$
$$\text{Причем, равенство} \quad \Longleftrightarrow \quad q_1(x) \equiv q_2(x)\ \forall [a,b].$$

С другой стороны, из сделанных предположений вытекает, что $y(a) \geqslant 0$ и $y(b) \geqslant 0$, т.е.

$$W(b) - W(a) = y(b)z'(b) - y(a)z'(a) \leqslant 0$$
$$\text{причем равенство} \iff y(a) = y(b) = 0.$$

Следовательно, при сделанных предположениях

$$W(b) - W(a) = 0,\ \text{откуда } q_1(x) \equiv q_2(x)\ \forall [a,b] \text{ и } y(a) = y(b) = 0.$$

Однако, $z(a) = z(b) = 0$, и, следовательно $z(x)$ и $y(x)$ – это решения одного и того же дифференциального уравнения второго порядка, причем $z(a) = y(a) = 0$. Тогда (по теореме едиственности) они пропорциональны, т.е. $y(x) = Cz(x)$. ■

Утверждение 7 *Каждое собственное значение λ оператора Штурма-Лиувилля удовлетворяет неравенству ($q(x) \geqslant 0$):*

$$\lambda \geqslant \left(\frac{\pi}{l}\right)^2.$$

Доказательство. Если $q(x) \equiv 0$, то это очевидно. Пусть $q(x) \not\equiv 0$. Как мы знаем, $\lambda > 0$. Рассмотрим соответствующую собственную функцию оператора Штурма-Лиувилля:

$$-z'' = (\lambda - q(x))z, \quad z(0) = z(l) = 0.$$

Сравним решение этого уравнения с решением $y(x) = \sin\sqrt{\lambda}x$ уравнения

$$-y'' = \lambda y.$$

Применим теорему Штурма, в которой $q_1(x) = \lambda \geqslant \lambda - q(x) = q_2(x)$. Тогда функция $y(x)$ где-то обращается в ноль на интервале $(0,l)$. Но это возможно, только если выполнено неравенство

$$\sqrt{\lambda}l \geqslant \pi \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{\lambda} \geqslant \frac{\pi}{l}.$$

■

Займемся теперь исследованием асимптотических свойств собственных значений оператора Штурма-Лиувилля. Обозначим для удобства $\lambda = k^2$. Тогда основное уравнение примет вид

$$-y'' + q(x)y = k^2 y, \quad k > 0. \tag{3}$$

Обозначим $\psi = \psi(x,k)$ – решение уравнения (3) с начальными условиями

$$\psi(0,k) = 0, \quad \psi'(0,k) = k$$

(если $q(x) \equiv 0$, то $\psi(x,k) = \sin kx$).

Следовательно, собственные значения оператора Штурма-Лиувилля имеют вид $\lambda = k^2$, где k такое, что $\psi(l,k) = 0$.

Из теоремы Штурма следует, что количество нулей функции $\psi(x,k) = 0$, лежащих на любом фиксированном отрезке $[0,a]$, где $a \leqslant l$, является неубывающей функцией k. Поэтому с ростом k все нули функции $\psi(x,k)$ сдвигаются влево. Собственные значения соответсвуют тем k, при которых в точке l появляется новый нуль.

Поскольку количество этих нулей конечно при любом k, то собственные значения образуют дискретную последовательность

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots,$$

которая, как легко видеть бесконечна. В самом деле, по теореме Штурма, число нулей функции $\psi(x,k)$ на $(0,l)$ не меньше, чем число нулей на $(0,l)$ у соответствующего решения уравнения

$$-y'' + My = k^2 y, \quad \text{где } M = \max_{x \in [0,l]} q(x).$$

Но этим решением является функция $\sin\left(\sqrt{k^2 - M}x\right)$ при $k^2 > M$, и число ее нулей на $(0,l)$ неограниченно растет при $k \to +\infty$. Доказана

Теорема 2 *Задача Штурма-Лиувилля имеет бесконечное число решений, все ее собственные значения λ_n положительны и $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Собственные функции $y_n(x)$, соответствующие λ_n, ортогональны. Собственная функция $y_n(x)$ имеет ровно $(n-1)$ нулей на интервале $[0,l]$.*

Опишем асимптотическое поведение больших собственных значений оператора Штурма-Лиувилля. Это легко сделать с помощью теоремы Штурма. Более точно, собственные значения оператора

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

заключены между собственными значениями операторов

$$L_1 = -\frac{d^2}{dx^2} \quad \text{и} \quad L_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + M,$$

где $M = \max_{x \in [0,l]} q(x)$. Поскольку собственные значения операторов L_1 и L_2 равны, соответственно,

$$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + M, \ n = 1, 2, \dots,$$

получаем

$$\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \leqslant \lambda_n \leqslant \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 + M,$$

откуда следует, что

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Можно также показать, что

$$y_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x + O\left(\frac{1}{n}\right), \ n \to \infty.$$

В завершение сформулируем без доказательства теорему о полноте.

Теорема 3 *Собственные функции* $\{y_n(x)\}$ *задачи Штурма-Лиувилля образуют* *полную ортогональную систему в пространстве* $L_2[0, l]$.

Полностью доказательство этой теоремы, а также о других свойствах задачи Штурма–Лиувилля, можно прочитать в книге М.А.Шубин, "Лекции об уравнениях математической физики".