Математический анализ. 2 курс. 2 семестр.

Программа коллоквиума за 3 модуль 28 марта 2017 г.

1. Сформулировать аксиомы евклидова пространства. Доказать неравенство Коши-Буняковского. Дать определение ортогональной системы в евклидовом пространстве. Дать определение полной ортогональной системы, ортогонального базиса и ортонормированного базиса. Привести примеры бесконечномерных евклидовых пространств и ортонормированных базисов в них.

2. Доказать теорему об ортогонализации в евклидовом пространстве. Доказать существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве.

3. Дать определение коэффициентов Фурье относительно ортонормированной системы в евклидовом пространстве. Доказать утверждение о наименьшем уклонении частичной суммы ряда Фурье любого вектора. Доказать неравенство Бесселя. Дать определение замкнутой ортонормированной системы (равенство Парсеваля). Доказать сходимость ряда Фурье для полной системы. Доказать теорему об эквивалентности свойств замкнутости и полноты ортонормированной системы в сепарабельном евклидовом пространстве. Сформулировать и доказать равенство Парсеваля для скалярного произведения двух векторов.

4. Дать определение коэффициентов и ряда Фурье относительно ортогональной системы в евклидовом пространстве. Привести равенство Парсеваля для ортогональной системы. Доказать теорему Рисса-Фишера для полного евклидова пространства. Доказать критерий полноты ортонормированной системы в полном сепарабельном евклидовом пространстве. Доказать следствие об однозначном восстановлении вектора по его коэффициентам Фурье.

5. Сформулировать аксиомы гильбертова пространства. Доказать теорему об изоморфизме гильбертовых пространств. Дать определение линейного многообразия и подпространства в гильбертовом пространстве. Доказать теорему о существовании ортонормированного базиса в любом подпространстве гильбертова пространства. Дать определение ортогонального дополнения к подпространству гильбертова пространства. Доказать теорему о представлении гильбертова пространства в виде прямой суммы любого подпространства M и его ортогонального дополнения $M^{\perp}$.

6. Дать определение комплексного евклидова пространства. Привести примеры комплексных евклидовых пространств. Дать определение ортогональности, ортогональной системы и ортонормированной системы в комплексном евклидовом пространстве. Привести равенства Парсеваля для нормы и для скалярного произведения в комплексном евклидовом пространстве. Дать определение комплексного гильбертова пространства. Сформулировать теорему об изоморфизме комплексных гильбертовых пространств.

7. Дать определение пространства L_2 функций с интегрируемым квадратом. Доказать, что пространство L_2 является евклидовы пространством относительно соответствующего скалярного произведения. Привести неравенство Коши-Буняковского, формулы для нормы и расстояния в пространстве L_2. Доказать теорему о полноте пространства L_2 при $\mu(X) < \infty$. Дать определение меры с конечным базисом. Сформулировать теоремы о сепарабельности пространств L_1 и L_2 для меры со счетным базисом. Дать определение комплексного пространства L_2.

8. Дать определение сходимости последовательности функций $\{f_n(x)\}$ в среднем и в среднем квадратичном. Доказать, что при $\mu(X) < \infty$ сходимость в среднем квадратичном влечет сходимость в среднем. Доказать, что при $\mu(X) < \infty$ из равномерной сходимости следует сходимость в среднем квадратичном. Дать определение сходимости по мере. Доказать, что сходимость в среднем влечет сходимость по мере. Доказать, что при $\mu(X) < \infty$ из сходимости почти всюду вытекает сходимость по мере. Доказать, что из сходящейся по мере последовательности $\{f_n(x)\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится почти всюду.

9. Ортогональность тригонометрической системы в $L_2[-\pi, \pi]$. Формула коэффициентов Фурье. Сходимость в $L_2[-\pi, \pi]$ частичных сумм ряда Фурье по тригонометрической системы. Равенство Парсеваля. Тригонометрические системы в $L_2[0, \pi]$ и их полнота. Формулы коэффициентов Фурье и равенство Парсеваля для этих систем. Ряд Фурье в комплексной форме. Формулы для коэффициентов Фурье и равенство Парсеваля для квадрата нормы и для скалярного произведения в $L_2[-\pi, \pi]$.

10. Дать определение многочленов Лежандра. Доказать ортогональность этой системы. Сформулировать теорему об ортонормированных системах в прямых произведениях пространств L_2. Тригонометрическая система в $L_2[-\pi, \pi]^2$ в комплексной форме. Привести формулы для коэффициентов Фурье и выписать равенство Парсеваля. Многочлены ортогональные относительно данного веса. Многочлены Чебышева с соответствующим весом. Доказать ортогональность и полноту системы многочленов Чебышева.

11. Представление частичной суммы тригонометрического ряда Фурье в виде интеграла Дирихле. Доказать лемму Римана. Принцип локализации для тригонометрического ряда Фурье. Достаточное условие Дини сходимости ряда Фурье в точке к значению функции в этой точке. Достаточное условие сходимости ряда Фурье в каждой точке для ограниченных функций с разрывами первого рода.

12. Достаточное условие равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье. Представление сумм Фейера в виде интеграла Фейера. Установить свойства ядер Фейера. Доказать теорему Фейера для непрерывных периодических функций.

13. Доказать теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами. Доказать вторую теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций многочленами. Доказать лемму о дифференцировании ряда Фурье. Установить связь гладкости функции со скоростью убывания коэффициентов ее ряда Фурье. Доказать теорему о скорости сходимости ряда Фурье в зависимости от гладкости функции. Доказать формулу интегрирования ряда Фурье.

14. Доказать изопериметрическое неравенство. Сформулировать 1-ую краевую задачу для уравнения теплопроводности. Привести основные шаги метода Фурье (метода разделения переменных) для решения 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности (без обоснования сходимости).

15. Доказать сходимости ряда, представляющего решение 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности, которое получается по методу Фурье. Доказать теорему о существовании решения 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Доказать теорему о единственности решения 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Записать формулу для решения 1-ой краевой задачи уравнения теплопроводности с помощью функции Грина этой задачи и обосновать ее.

16. Сформулировать 1-ую краевую задачу для уравнения упругих колебаний струны. Привести основные шаги метода Фурье (метода разделения переменных) для решения 1-ой краевой задачи для уравнения упругих колебаний струны. Сформулировать и доказать теорему о существовании и единственности решения 1-ой краевой задачи для уравнения упругих колебаний струны (без доказательства). Сформулировать теорему о существовании и единственности решения 1-ой краевой задачи для неоднородного уравнения упругих колебаний струны с правой частью (без доказательства) и вывести формулу для решения.

17. Сформулировать общую задачу Штурма–Лиувилля. Доказать основные свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля: симметричность и положительность оператора, ортогональность собственных функций, однократность собственных значений. Доказать теорему Штурма. Доказать оценку снизу для 1-го собственного значения оператора Штурма–Лиувилля: $\lambda > \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$. Описать асимптотические свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля. Теорема о полноте системы собственных функций оператора Штурма-Лиувилля (без доказательства).

Порядок проведения коллоквиума за 3 модуль

Коллоквиум проводится в устной форме. Все студенты получат по билету, в котором будет два вопроса из приведенного выше списка. На подготовку дается 30 минут. Дополнительными материалами пользоваться не разрешается. После ответа на билет каждый студент получит одну задачу по выбору преподавателя. Задачи не сложные, в основном на понимание материала курса. Многие из этих задач разбирались на лекция, семинарах или были в листках.

Желаю успешной сдачи коллоквиума!

Владимир Чепыжов