

## Задачи к спецкурсу "Введение в теорию моделей" (2017)

Все модели сигнатуры с равенством считаются нормальными.

Запись  $(Q, <)$  означает  $(Q, <_Q)$ , т.е. модель сигнатуры  $\{<\}$  на множестве  $Q$ . И т.п.

Теория называется *конечно аксиоматизируемой*, если она эквивалентна некоторой конечной теории.

Возрастающая последовательность теорий  $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \dots$  называется *строго возрастающей*, если эти теории попарно не эквивалентны.

25. (Гарский) Докажите, что объединение строго возрастающей последовательности теорий не является конечно аксиоматизируемой теорией.
26. а) Докажите, что теория всех бесконечных моделей в сигнатуре  $\{=\}$  не конечно аксиоматизируема.  
б) Полна ли эта теория?
27. Рассмотрим игры  $EF_m(L_6, L_7)$ , где  $L_n = (\{1, 2, \dots, n\}, <)$ , при различных  $m$ . Выясните, при каких  $m$  второй игрок имеет выигрышную стратегию.
28.  $(\mathbf{N}, <) + (\mathbf{Z}, <)$  обозначает порядковую сумму натуральных и целых чисел (копия целочисленной прямой расположена после множества натуральных чисел). Выясните, какой игрок имеет выигрышную стратегию в  $EF_6((\mathbf{N}, <), (\mathbf{N}, <) + (\mathbf{Z}, <))$ .
29. При каких  $n$  верно, что  $(\mathbf{N}, <) \equiv_n (\mathbf{N}, <) + (\mathbf{N}, <)$ ?

Класс, состоящий из всех конечных моделей какой-нибудь замкнутой формулы, называется *финитно элементарным*.

30. Является ли финитно элементарным класс всех конечных моделей четной мощности в сигнатуре  $\{P, =\}$ , где  $P$  - одноместный предикат?
31. Рассмотрим теорию  $Th(\mathbf{N}, 0, S, =)$ , где  $S(x) = x + 1$  — функция следования.
  - (а) Является ли эта теория конечно аксиоматизируемой?
  - (б) Докажите, что в этой теории элиминируются кванторы.
32. Докажите, что в теории  $\mathbf{Z}$  в сигнатуре  $\{+, 0, - (\text{одноместный}), =\}$  кванторы не элиминируются.
33. Рассмотрим сигнатуру с одним двуместным предикатом  $E$  и равенством. Для каждой из следующих теорий выясните, элиминируются ли в ней кванторы и является ли она конечно аксиоматизируемой
  - а)  $E$  - отношение эквивалентности, которое имеет бесконечно много классов, и все они 2-элементны.
  - б)  $E$  - отношение эквивалентности, которое имеет бесконечно много классов, и все они бесконечны.
  - в)  $E$  - отношение эквивалентности, которое имеет бесконечно много 2-элементных и бесконечно много 3-элементных классов, и других классов нет.

г)  $E$  - отношение эквивалентности, и для любого конечного  $n$ ,  $E$  имеет один класс мощности  $n$ .

34. Для сигнатуры  $\{=, <, P^1\}$  рассмотрим модели вида  $(\mathbf{Q}, <, X)$ , где  $X \subseteq \mathbf{Q}$ .

а) Найдите  $q(T)$  для  $T = \text{Th}(\{(\mathbf{Q}, <, X) \mid X \text{ выпукло}\})$ .

б) Найдите  $q(T)$  для  $T = \text{Th}(\{(\mathbf{Q}, <, X) \mid X \text{ открыто и всюду плотно в топологии } \mathbf{Q}\})$ .