Первые задачи о кубиках.
К занятию 24.03.

Не все из задач этого списка были сформулированы на прошлом занятии!

1. Сформулировать и доказать обобщение тождества Эйлера

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = mF(x_1, \ldots, x_n)$$

на высшие производные. ($F(x_1, \ldots, x_n)$ — однородная форма степени m.)

2. Пусть X — гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, $A \in X$. Докажите, что геометрическое место точек, лежащих на прямых, проходящих через точку A и пересекающих X с кратностью, большей 1, является либо гиперплоскостью, заданной уравнением $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(A) = 0$ (в случае, когда среди чисел $\frac{\partial F}{\partial x_i}(A)$ есть ненулевые), либо всем $\mathbb{P}^n$ (в случае, когда все $\frac{\partial F}{\partial x_i}(A) = 0$). В первом случае точка A называется неособой точкой гиперповерхности X, во втором — особой точкой.

3. Пусть гиперповерхность X задана в $\mathbb{P}^n$ однородным уравнением степени m $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$, причем существует прямая, пересекающая X в m различных точках. Докажите, что если однородный многочлен $G(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в 0 на X, то $F|G$. (Основное поле алгебраически замкнуто!)

4. Точка A кривой X в $\mathbb{P}^2$ называется точкой перегиба, если касательная прямая к кривой X в точке A имеет в этой точке трехкратное пересечение с X. Докажите, что если точка графика функции $y = f(x)$ является точкой перегиба в смысле курса анализа 1 семестра, то в нашем смысле это тоже точка перегиба. Верно ли обратное?

5. Найдите все точки перегиба кубики Ферма, заданной в аффинных координатах уравнением $x^3 + y^3 = 1$. (Не все из них вещественны!)

6. Докажите, что если прямая проходит через две точки перегиба кубики, то она обязательно пересекает кубику в трех различных точках, причем третья точка также является точкой перегиба.

7. Сколько точек перегиба у неособой кубики?

8. Докажите, что любая особая нераспавшаяся кубика проективно эквивалента либо декартову листу, либо полукубической параболе.

9. Докажите, что любую неособую кубику на плоскости можно подходящим выбором системы координат привести к нормальной форме Вейерштрасса $y^3 = P_3(x)$ (в аффинных координатах), где

$P_3(x)$ некоторый кубический многочлен. (Подсказка: трудная часть — доказать, что на любой кубике есть точка перегиба; легкая часть — выбрать координаты так, чтобы касательная в точке перегиба стала бесконечно удаленной прямой.)

10. Приведите к нормальной форме Вейерштрасса кубику Ферма.

11. Точка M лежит на плоской кубической кривой X. Для любой прямой l, проходящей через M, обозначим через A и B две другие точки пересечения кубики с прямой l, и пусть N — такая точка на прямой l, что AB гармонически делит MN. Опишите геометрическое место точек N.

12. Сколько касательных можно провести из данной точки к данной кубике? А если точка лежит на кубике?

13. Придумать вещественную неособую кубику и точку вне нее, так чтобы все касательные из предыдущей задачи можно было явно увидеть на рисунке.

14. Доказать, что следующая операция превращает неособую кубику X с выделенной точкой $o \in X$ в абелеву группу. Для точек $a \in X$, $b \in X$ обозначим через $a * b$ третью точку пересечения прямой ab с кривой X. Теперь определим $a + b$ как третью точку пересечения прямой, проходящей через $a*b$ и o, с кривой X. (Самое трудное — ассоциативность!)