

## 1. Сколькими способами...?

- 1.1. Сколькими способами можно переставить буквы в слове:  
а) ВОЛГА; б) АМАЗОНКА; в) МИССИСИПИ?  
г) В скольких перестановках последнего слова три буквы С идут не подряд?
- 1.2 (Малая теорема Ферма). а) Пусть  $p$  — простое число. Сколькими способами можно раскрасить карусель из  $p$  кабинок, если каждую кабинку можно красить в один из  $m$  цветов? (Карусель можно поворачивать).  
б\*) А что происходит, если число кабинок составное?
- 1.3. *Разложение (composition)* целого положительного числа  $n$  — это его представление в виде  $n = a_1 + \dots + a_k$ , где  $a_i$  — целые положительные числа. Например, у числа 3 есть четыре разложения: 3, 1 + 2, 2 + 1 и 1 + 1 + 1. Числа  $a_i$  называются *частями* разложения. Найдите число разложений числа  $n$ ;
- 1.4. а) Сколько элементов в  $n$ -мерном векторном пространстве над полем  $\mathbb{F}_q$ ?  
б) Сколько в этом пространстве существует прямых, проходящих через 0?  
в) А  $k$ -мерных подпространств?  
г) *Полным флагом* в векторном пространстве  $V$  называется последовательность подпространств  $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$ , где  $\dim V_i = i$ . Сколько существует полных флагов в пространстве  $\mathbb{F}_q^n$ ?  
д) Что происходит с ответами к предыдущим пунктам при  $q = 1$ ?
- 1.5. а) Сколько всего перестановок граней куба можно получить, вращая его?  
б) Сколько существует различных «игральных кубиков» (кубиков, на гранях которых расставлены числа от 1 до 6)?  
в) Сколько из них «правильных» игральных кубиков (таких, что сумма чисел на противоположных гранях равна 7)?  
г\*) Два правильных игральных кубика склеивают по грани. Сколько различных объектов можно так получить?  
д) Сколько существует различных кубиков, грани которых раскрашены в черный и белый цвета?  
е\*) А если цветов  $n$ ?
- 1.6\* (Историческая задача). а) В Москве трамвайный билет с номером, состоящим из шести цифр, считался счастливым, если сумма его первых трех цифр равна сумме трех последних. Найдите число счастливых билетов.  
б) В Санкт-Петербурге трамвайный билет считают счастливым, если сумма цифр, стоящих на его чётных местах, равна сумме цифр на нечётных местах. Найдите число билетов, счастливых одновременно «по-московски» и «по-петербургски».