3. Линейные рекурренты

3.1. Какая из указанных последовательностей удовлетворяет рекуррентному уравнению $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$:
а) $a_n = 5n + 3$; **б)** $a_n = (2n + 1) \cdot 2^n$; **в)** $a_n = \cos(2n)$?

В следующих задачах «найдите» означает «найдите в виде формул, содержащих многочлены от n, a^n и $\cos(\omega n + \varphi)$».

3.2. Найдите все такие последовательности $\{a_n\}$, что $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ и для любого $n \geq 1$ выполнено равенство
а) $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$;
б) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$;
в) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$;
г) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$;
д) $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$;
е*) $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$.

3.3. Найдите все последовательности, для которых $a_1 = 5$ и $a_{n+1} - 2a_n$ равно
а) 0; **б)** 1; **в)** n; **г)** 3^n; **д*)** 2^n; **е*)** $n \cdot 3^n$.

3.4. То же с заменой $a_{n+1} - 2a_n$ на $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n$.

3.5. **а)** Если λ — корень кратности l уравнения $x^k = p_{k-1}x^{k-1} + \ldots + p_0$, то для любого многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$ степени меньше l функция $f(n)\lambda^n$ является решением (линейного однородного рекуррентного) уравнения
$a_{n+k} = p_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + p_0 a_n$.
б*) Сформулируйте и докажите теорему о явном виде решений линейного однородного рекуррентного уравнения k-го порядка
$a_{n+k} = p_{k-1}a_{n+k-1} + \ldots + p_0 a_n$.
в*) То же для линейного неоднородного рекуррентного уравнения.