

Группы и алгебры Ли II. Семинар 22.03.17

Задача 1. а) Опишите алгебру Ли группы $SU(1, 1)$. Покажите, что она состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} ia & b + ic \\ b - ic & -ia \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

б) Покажите, что комплексная оболочка алгебры Ли $su(1, 1)$ изоморфна $sl(2, \mathbb{R})$.

Задача 2. а) Выпишите действие образующих алгебры Ли $su(1, 1)$ в пространстве D_χ основной серии в компактной реализации

б) Выпишите действие образующих $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ комплексной оболочки $sl(2, \mathbb{C})$ алгебры Ли $su(1, 1)$ в пространстве D_χ основной серии в компактной реализации

в) Найдите матричные коэффициенты операторов из пункта б) в базисе функций, чье ограничение на компактную подгруппу есть $e^{im\varphi}$

Задача 3. Вычислите действие оператора Казимира в пространстве D_χ

Задача 4. а) Покажите, что значение обобщенной функции x^{-1} на пробной функции $f(x)$ равно

$$(x^{-1}, f(x)) = \int_0^\infty \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx = v.p. \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x)}{x} dx$$

б) Покажите, что значение обобщенной функции x^{-2} на пробной функции $f(x)$ равно

$$(x^{-2}, f(x)) = \int_0^\infty \frac{f(x) + f(-x) - f(0)}{x} dx$$

в) Верно ли, что $\frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2}$?

Задача 5. а) Покажите, что $\delta(x)$ четна и однородна степени -1 , а $\delta^{(k)}$ однородна степени $-k - 1$ и имеет четность $k + 1 \pmod{2}$.

б) Чему равны производные обобщенных функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$?

Задача 6. Проверьте, используя компактную реализацию, что представления D_χ основной серии унитарны, если s чисто мнимо. Докажите их неприводимость.