07.03.2017 | С/К R-матрица: происхождение...

Лекция № 8

Краткий план дальнейших занятий:

- Алгебры Хопфа
- Квантовые группы ($Fun_q(sl_2)$ и $U_q(sl_2)$)
- Квантовые матричные алгебры: алгебраическая структура, тожд. Гамильтона-Кэли, симметрические функции
- Теория представлений

Напомним некоторые важные понятия и введём обозначения.

(1) Векторное (линейное) простр. и дуальное к нему.

Мы будем рассматривать конечномерные и ∞-мерные пространства. В ∞-мерном случае всегда будем предполагать наличие счётного базиса $\{e_k\} \subset V$

в пространстве V, а его векторами будем считать линейные комбинации вида $v=\sum_{k=1}^{\infty} v^k e_k$, где только конечное число коэфф. $v^k \neq 0$.

Числовое поле, над которым заданы наши пространства, почти всегда $\mathbb{C}$ - поле комплексных чисел.

Для $\forall$ линейного пространства V можно ввести:

- $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ - множество (линейное пространство) линейных функционалов на V
- $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$ пространство линейных операторов $V \to V$. Это ассоциативная алгебра с единицей (умножение - последовательное применение операторов).

На паре пространств V и V^* можно задать билинейную форму

$\langle\, , \rangle_l : V^* \otimes V \to \mathbb{C}$ (левое спаривание)

или $\langle\, , \rangle_r : V \otimes V^* \to \mathbb{C}$ (правое спаривание) которая будет не вырождена:

$$\forall \underset{\neq 0}{\xi} \in V^* \ \exists v \in V : \langle \xi, v \rangle \neq 0$$

$$\forall v \neq 0 \in V \ \exists \xi \in V^* : \langle \xi, v \rangle \neq 0$$

(для определенности, будем работать с левой формой).

Для <u>конечномерного</u> пространства V это влечёт равенство размерностей

$$\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} V^*.$$

Для заданной формы $\langle , \rangle$ и фиксированного базиса $\{e_k\}$ в V в пространстве V^* можно выделить дуальный базис $\{\epsilon^k\}$:

$$\langle \epsilon^k, e_i \rangle = \delta_i^k = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

Это взаимно-дуальные базисы.

Если U^* и V^* дуальны к U и V, то <u>по определению</u> будем считать:

$$(U \otimes V)^* = V^* \otimes U^*$$

То есть, для $\xi \in V^*$, $\eta \in U^*$, $v \in V$, $u \in U$:

$$\langle \xi \otimes \eta, u \otimes v \rangle \stackrel{def}{=} \langle \xi, v \rangle_V \cdot \langle \eta, u \rangle_U$$

Аналогично определяется правый двойственный базис в V^* $\{\varphi^j\}$:
$$\langle e_i, \varphi^j \rangle_r = \delta_i^j$$

$\boxed{3}$ Вектора φ^j вообще говоря отличаются от векторов левого дуального базиса ϵ^j.

Рассмотрим теперь пространство линейных операторов $End(V): V \to V$.

$\boxed{\text{Утв.}}$ Для <u>конечномерных</u> пространств
$$End(V) \cong V \otimes V^*.$$

<u>Доказательство.</u>

(→) Рассмотрим базис $e_i \otimes \epsilon^j$ в $V \otimes V^*$, составленный из взаимно-дуальных базисных векторов V и V^*.

Любой базисный вектор $e_i \otimes \epsilon^j$ превращается в оператор на V (то есть, в элемент $End(V)$) заданием линейного действия:

$$\forall v \in V: \; e_i \otimes \epsilon^j \triangleright v \overset{def}{=} e_i \langle \epsilon^j, v \rangle =$$
$$= e_i \langle \epsilon^j, v^k e_k \rangle = e_i v^j \in V$$

(i) На всё пространство $V\otimes V^*$ это действие распространяется по линейности:

$$\sum_{i,j} \alpha^i_j \, e_i \otimes \epsilon^j \triangleright v = \sum_{i,j} e_i \, \alpha^i_j \, v^j,$$

коэффициенты из $\mathbb{C}$ где $v = \sum_k v^k e_k$

(ii) Обратное соответствие строится через матрицу оператора в данном базисе $\{e_k\}$:

$$\forall \hat{F} \in \mathrm{End}(V): \quad \hat{F} \triangleright e_k = \sum_j e_j \, \mathbb{F}^j_k$$

Здесь $\mathbb{F} = \|F^i_j\|$ — матрица оператора $\hat{F}$.

Образуем линейную комбинацию

$$\sum_{i,j} \mathbb{F}^i_j \, e_i \otimes \epsilon^j \in V \otimes V^*.$$

Этот вектор действует на V так же, как и $\hat{F}$.

Биективность подобных соответствий легко следует из невырожденности формы $\langle \, , \, \rangle$ и её доказательство оставляется в виде упражнения. ∎

$\boxed{3}$ В дальнейшем не будем писать знак суммирования по немому повторяющемуся индексу.

$$v = \sum_{k=1}^{\dim V} v^k e_k \equiv v^k e_k \quad \text{и т.д.}$$

$\boxed{3}$ Для ∞-мерных пространств $V \otimes V^* \subset \mathrm{End}(V)$ – собственное подпространство в $\mathrm{End}(V)$.

(2) Ассоциативная алгебра с 1 над полем $\mathbb{C}$.

$\boxed{\text{Опр.}}$ Ассоциативная алгебра с 1 над полем $\mathbb{C}$ это линейное комплексное пространство $\mathcal{A}$ с бинарной билинейной ассоциативной операцией $m: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (умножение) и единичным элементом $e_{\mathcal{A}}$ со свойствами:

(i) $m(\alpha a + \beta b, c) = \alpha m(a, c) + \beta m(b, c)$
$m(a, \beta b + \gamma c) = \beta m(a, b) + \gamma m(a, c)$
$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\forall a, b, c \in \mathcal{A}$ (билинейность)

(ii) $m(a, m(b, c)) = m(m(a, b), c)$ – ассоциативность

(iii) $m(e_A, a) = m(a, e_A) = a$

$\forall a \in A$ (свойства единичного элемента).

Это же определение можно переписать на языке коммутативных диаграмм.

$$\begin{tikzcd} & A\otimes A\otimes A \arrow[dl, "id\otimes m"'] \arrow[dr, "m\otimes id"] & \\ A\otimes A \arrow[r, "m"] & A & A\otimes A \arrow[l, "m"'] \end{tikzcd}$$

Ассоциативность умножение и выражается в коммутативности этой диаграммы.

$\boxed{3}$ Диаграмма коммутативна, если разные пути её обхода приводят к одному результату. Обход диаграммы: последовательное выполнение операций, встречающихся на данном пути обхода.

Наличие единичного элемента тоже можно описать диаграммой отображений на основе следующего утверждения.

$\boxed{\text{Утв}}$ $\exists e_A \in A \Leftrightarrow \exists$ <u>гомоморфизм</u>

$\eta: \mathbb{C} \to A$ (вложение поля в A)

со свойствами:

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $\eta(z_1 + z_2) = \eta(z_1) + \eta(z_2)$

  $\eta(z_1 \cdot z_2) = m(\eta(z_1), \eta(z_2))$

(гомоморфизм)

- $m(a, \eta(z)) = m(\eta(z), a) = z \cdot a$

  $\forall z \in \mathbb{C}, \forall a \in A$

<u>Доказательство:</u>

(i) Пусть в A $\exists$ единичный элемент e_A. Определим гомоморфизм $\eta: \mathbb{C} \to A$ правилом: $\eta(z) = z \cdot e_A$

Гомоморфность следует из аксиом линейного пространства A, второе свойство — билинейность m и свойство e_A.

(ii) Пусть $\exists \eta(z)$ с указанными свойствами. Тогда элемент $\eta(1) = e_A$ — единичный элемент A. Проверка элементарна. $\blacksquare$

Теперь существование единичного элемента переписывается в виде условия коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
A\otimes C \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "id\otimes\eta"] & A \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, equal, "id"] & C\otimes A \arrow[d, "\eta\otimes id"] \\
A\otimes A \arrow[r, "m"] & A & A\otimes A \arrow[l, "m"']
\end{tikzcd}$$

Нам часто будет встречаться оператор транспозиции на тензорном квадрате векторных пространств:

$$P : A\otimes A \to A\otimes A$$

$P(a\otimes b) = b\otimes a$ и линейно распространяется на всё пространство $A\otimes A$

Опр Алгебра A коммутативна, если $\forall\, a, b \in A$: $m(a,b) = m(b,a)$ или, если есть равенство 2х отображений $A\otimes A$: $m\circ P = m$

Значок $\circ$ символизирует композицию.

(3) <u>Универсальная обёртывающая алгебра конечномерной алгебры Ли.</u>

$\boxed{\text{Опр.}}$ Конечномерная алгебра Ли L – это конечномерное линейное пространство с билинейным антисимметричным отображением

$$[\,,\,] : L \otimes L \to L$$

(скобка Ли), которое удовлетворяет тождеству Якоби:

$$\forall a, b, c \in L:$$

$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0.$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Линейное представление L в V – это линейное отображение

$T : L \to End(V)$ со свойством:

$$T([a,b]) = T(a)T(b) - T(b)T(a).$$

$$\forall a, b \in L$$

$\boxed{3}$ Скобка Ли сама по себе не обязательно коммутатор. Например, в $\mathbb{R}^3$:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b} \text{ – скобка Ли.}$$

С каждой алгеброй Ли L связана (бесконечномерная) ассоциативная алгебра $U(L)$ — универсальная обёртывающая алгебра для L.

Приведём её явную конструкцию, которую можно считать определением.

<u>1 шаг.</u> Строим ассоциативную алгебру с единицей $\mathbb{T}(L)$ — так называемую свободную тензорную алгебру линейного пространства L:

$$\mathbb{T}(L) = \mathbb{C} \oplus L \oplus L^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus L^{\otimes k} \oplus \ldots$$

Элементами $\mathbb{T}(L)$ являются <u>конечные</u> линейные комбинации векторов из всевозможных $L^{\otimes k}$.

Структура ассоциативной алгебры:

Пусть $a = x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m \in L^{\otimes m}$

$b = y_1 \otimes y_2 \otimes \ldots \otimes y_n \in L^{\otimes n}$

Тогда <u>по определению</u>,

$$a \cdot b = x_1 \otimes \ldots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_n \in L^{\otimes (m+n)}$$

На $\forall$ элементы $\mathbb{T}(L)$ это определение распространяется по линейности.

Единичный элемент $T(L)$: $1 \in \mathbb{C}$.
Алгебра $T(L)$ очевидно некоммутативна и ассоциативна. Пока она не содержит никакой информации о лиевской структуре L.

<u>2 шаг.</u>

Двусторонний идеал, порождённый лиевской структурой.
Запишем скобку Ли через структурные константы алгебры L и базис e_i:

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^{k} e_k$$

Если $\dim L = n$, то здесь $\frac{n(n-1)}{2}$ независимых соотношений.
Рассмотрим в $T(L)$ $\frac{n(n-1)}{2}$ элементов

$$S_{ij} = e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i - C_{ij}^{k} e_k$$

Пусть Y — множество из S_{ij}
Рассмотрим линейное подпространство $\langle Y \rangle$ порождённое в $T(L)$

векторами вида:

$$u_{ij}(X, Y) = X \otimes S_{ij} \otimes Y$$

где X и Y – $\forall$ элементы $T(L)$

Очевидно, $\langle \mathcal{Y} \rangle$ – идеал (двухсторонний) в $T(L)$ относительно вверхнего выше умножения.

3 шаг.

Фактор-алгебра $U(L) = \dfrac{T(L)}{\langle \mathcal{Y} \rangle}$ называется универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли L.

$\boxed{3}$ Обычно при работе с $U(L)$ опускают знак $\otimes$ и, например, вместо $a \otimes b$ пишут просто ab.

Пример: $L = sl_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e, f, h)$,

$$\left.\begin{aligned} &[h, e] = 2e \\ &[h, f] = -2f \\ &[e, f] = h \end{aligned}\right\}$$ алгебра Ли (трёхмерная)

Теперь $U(sl_2)$ это ассоциативная алгебра, мультипликативно порожденная генераторами E, F и H, связанными условиями:

$$HE - EH = 2E$$
$$HF - FH = -2F$$
$$EF - FE = H$$

Эти условия ↑ позволяют выделить базисные элементы в каждой однородной компоненте $U(sl_2)$:

$$U(sl_2) = \mathbb{C} \oplus U^{(1)} \oplus \ldots \oplus U^{(k)} \oplus \ldots$$

$U^{(k)}$ – линейные оболочки мономов от генераторов E, F и H одной и той же степени k:

$$U^{(k)} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left(F^{k_1} H^{k_2} E^{k_3}\right)$$
$$k_1 + k_2 + k_3 = k$$
$$k_i \geq 0.$$

Например $U^{(2)}$ содержит только 6 независимых векторов: $E^2, F^2, H^2, FH,$ HE и FE вместо 9, которые были в $L^{\otimes 2} \in T(L)$

Это содержание теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта о базисе в универсальной обертывающей. Если L - алгебра Ли с произвольно упорядоченным базисом e_i, то в однородных компонентах $U(L)=\bigoplus_{k\geq 0} U^{(k)}(L)$ базисом будут элементы:

$$U^{(k)} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left(e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}\right),$$

где $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq N$.

Отсюда, например, следует, что у двух алгебр Ли L и M одной размерности $\dim_{\mathbb{C}} L = \dim_{\mathbb{C}} M$, размерности однородных компонент универсальных обертывающих тоже одинаковы:

$$\dim_{\mathbb{C}} U^{(k)}(L) = \dim_{\mathbb{C}} U^{(k)}(M) = \binom{N+K-1}{N-1}$$

(4) Структура биалгебры

Введем теперь новые структуры для ассоциативной алгебры A - коумножение и коединицу.

Полезность этих структур и разумность предлагаемых определений будем иллюстрировать на примере теории представлений алгебры A.

Пусть есть 2 представления A в пространствах V_1 и V_2: $T_1: A \to End(V_1)$
$T_2: A \to End(V_2)$

По-другому ещё говорят, что даны 2 A-модуля V_1 и V_2.

Как определить представление A в тензорном произведении $V_1 \otimes V_2$?

Для произвольной A это сложная задача (чаще всего, не решённая).

Но в $V_1 \otimes V_2$ легко задать представление другой алгебры, а именно, алгебры $A \otimes A$, по правилу:

$$(a \otimes b) \triangleright v_1 \otimes v_2 \overset{def}{=} (T_1(a) \triangleright v_1) \otimes (T_2(b) \triangleright v_2)$$

Здесь $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $a, b \in A$, а на произвольные элементы $A \otimes A$ и $V_1 \otimes V_2$ это правило обобщается по линейности.

Таким образом, представление A в $V_1 \otimes V_2$ легко строится, если $\exists$ гомоморфизм $\Delta : A \to A \otimes A$.
(коумножение)

В общем виде для $a \in A$ $\Delta(a) \in A^{\otimes 2}$ имеет вид:

$\Delta(a) = \sum_i a_i' \otimes a_i''$ – конечная сумма с какими-то a_i' и $a_i'' \in A$.

Применяются удобные обозначения Свидлера (Sweedler's notation):

$$\boxed{\Delta(a) = \sum_i a_i' \otimes a_i'' \equiv a_{(1)} \otimes a_{(2)}}$$

Если такое Δ существует, то представление $\forall a \in A$ в $\mathrm{End}(V_1 \otimes V_2)$ имеет вид: $a \longmapsto T_1(a_{(1)}) \otimes T_2(a_{(2)})$.

То есть: $a \xrightarrow{\Delta} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \xrightarrow{T_1 \otimes T_2} T_1(a_{(1)}) \otimes T_2(a_{(2)})$

Помимо гомоморфности:

$\Delta(\alpha a + \beta b) = \alpha \Delta(a) + \beta \Delta(b)$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) \Delta(b)$ $\quad a, b \in A$

потребуем ещё коассоциативности Δ: $\boxed{(id\otimes\Delta)\circ\Delta=(\Delta\otimes id)\circ\Delta}$

Это равенство отображений из A в $A\otimes A\otimes A$. Одна из мотивировок:

$$(V_1\otimes V_2)\otimes V_3\cong V_1\otimes(V_2\otimes V_3)$$

— ассоциативность тензорного произведения.

Свойство коассоциативности гомоморфизма Δ можно записать в виде условия коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & A\otimes A\otimes A & \\
A\otimes A \arrow[ur, "id\otimes\Delta"] & A \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] & A\otimes A \arrow[ul, "\Delta\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

Отметим, что эта диаграмма коассоциативности коумножения Δ только направлением стрелок отличается от диаграммы ассоциативности умножения m.

Отметим, что $\Delta(e_A)=e_A\otimes e_A$ по определению гомоморфизма и единичного элемента.

Одномерные представления A связаны с существованием <u>гомоморфизма</u> $\varepsilon: A \to \mathbb{C}$ с дополнительным свойством:

$$\boxed{(\varepsilon \otimes id)\circ\Delta = (id \otimes \varepsilon)\circ\Delta = id} \quad (*)$$

Это равенство 2х отображений

$$A \to \mathbb{C}\otimes A \cong A \quad \text{и} \quad A \to A\otimes\mathbb{C} \cong A$$

На языке теории представлений равенство (*) можно положить так:

$$(\varepsilon\otimes id)\circ\Delta(a) = (\varepsilon\otimes id)(a_{(1)}\otimes a_{(2)}) =$$
$$= 1\otimes\varepsilon(a_{(1)})a_{(2)} = a$$
$$(id\otimes\varepsilon)\Delta(a) = a_{(1)}\varepsilon(a_{(2)})\otimes 1 = a$$

Поэтому $\forall\, a\in A$ в некотором A-модуле V можно сопоставить 3 линейных оператора: $T(a)$, $T(\varepsilon(a_{(1)})a_{(2)})$ и $T(a_{(1)}\varepsilon(a_{(2)}))$. Равенство (*) требует, чтобы эти операторы совпадали.

Опр. Коумножение Δ и коединица ε — структуры коалгебры. Алгебра A с Δ и ε — биалгебра.