Лекция 22.03.17

Определим билинейное спаривание $D_\chi \otimes D_{-\chi} \to \mathbb{C}$ (в некомпактной реализации):

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx, \qquad \varphi_1 \in D_\chi,\ \varphi_2 \in D_{-\chi}.$$

Утверждение. Это спаривание инвариантно относительно действия группы $SL(2,\mathbb{R})$. Доказательство - простая проверка заменой переменных $y = \frac{ax+c}{bx+d}$:

$$\left(T_g^{(\chi)}\varphi_1, T_g^{(-\chi)}\varphi_2\right) =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1\left(\frac{ax+c}{bx+d}\right)|bx+d|^{s-1}\operatorname{sgn}^\varepsilon(bx+d)\varphi_2\left(\frac{ax+c}{bx+d}\right)|bx+d|^{-s-1}\operatorname{sgn}^\varepsilon(bx+d)dx =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1\left(\frac{ax+c}{bx+d}\right)\varphi_2\left(\frac{ax+c}{bx+d}\right)|bx+d|^{-2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(y)\varphi_2(y)dy = (\varphi_1,\varphi_2).$$

Аналогично, имеется полуторалинейное инвариантное спаривание $D_\chi \otimes D_{-\bar{\chi}} \to \mathbb{C}$,

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\bar{\varphi}_2(x)dx, \qquad \varphi_1 \in D_\chi,\ \varphi_2 \in D_{-\bar{\chi}}.$$

Следовательно, при $\chi = \bar{\chi}$, т.е., для чисто мнимого параметра $s = i\rho$: $\chi = (i\rho, \varepsilon)$ представление D_χ унитарно. Эти представления в классической терминологии образуют основную унитарную серию. В компактной реализации билинейное (и полуторалинейное) спаривание также имеет простую форму $(\psi_1, \psi_2) = \int_0^{2\pi}\psi_1(\theta)\psi_2(\theta)d\theta$
Определим оператор $A_\chi : D_s \to D_{-s}$,

$$A_\chi\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}|x_1 - x|^{-s-1}\varphi(x_1)\operatorname{sgn}^\varepsilon(x_1-x)dx$$

Утверждение. A_χ - сплетающий оператор. Проверим свойство сплетения $T_g^{(-\chi)}A_\chi = A_\chi T_g^{(\chi)}$ при $\varepsilon = 0$ при помощи замены пременных $y_1 = \frac{ax_1+c}{bx_1+d}$

$$A_\chi T_g^{(\chi)}\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}|x_1-x|^{-s-1}|bx_1+d|^{s-1}\varphi\left(\frac{ax_1+c}{bx_1+d}\right) =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{dy_1-c}{-by_1+a} - x\right|^{-s-1}|bx_1+d|^{s+1}\varphi(y_1)dy_1 =$$
$$|bx+d|^{-s-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{ax+c}{bx+d} - y_1\right|^{-s-1}\varphi(y_1)dy_1 = T_g^{(-\chi)}A_\chi\varphi(x)$$

Оператор $A_\chi : D_s \to D_{-s}$ определен при $\operatorname{Re} s > 0$, иначе интеграл расходится, так что невозможно даже посчитать композицию $A_\chi A_{-\chi}$. Его можно трактовать (с точностью до знака) либо как свертку $f_\chi * \phi(x)$ с функцией $f_\chi(x) = |x|^{-s-1}\operatorname{sgn}^\varepsilon(x)$, либо как вычисление обобщенной функции $f_\chi(z)$ на пробной функции $\varphi(z+x)$,

$$A_\chi\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\chi(z)\varphi(z+x)dz$$

Поэтому для аналитического продолжения оператора A_χ по параметру s нужно изучить аналитическое продолжение обобщенных функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda\operatorname{sgn} x$ по параметру

λ. Пусть $x_\pm^\lambda$ - обобщенные функции, определяемые при $\operatorname{Re}\lambda > -1$ равенствами

$$(x_+^\lambda, \varphi(x)) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx, \qquad (x_-^\lambda, \varphi(x)) = \int_{-\infty}^0 x^\lambda \varphi(x)dx = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(-x)dx$$

Тогда $|x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x = x_+^\lambda - x_-^\lambda$

Шаг 1 Продолжим аналитически x_+^λ в область $\operatorname{Re}\lambda > -2$ с полюсом в точке $\lambda = -1$, воспользовавшись равенством

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)dx = \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)dx + \int_0^1 x^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0))dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1},$$

в котором последний интеграл сходится уже при $\operatorname{Re}\lambda > -2$. Заметим, что в более узкой области $-2 < \operatorname{Re}\lambda < -1$ можно воспользоваться сходимостью интеграла $\int_1^\infty x^\lambda dx$ и переписать предыдущее равенство как

$$\int_0^\infty x^\lambda (\varphi(x) - \varphi(0))dx \tag{1}$$

Повторяя далее эту процедуру приходим к выражению для аналитического продолжения в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > -(n+1)$,

$$(x_+^\lambda, \varphi(x)) = \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)dx + \int_0^1 x^\lambda \left(\varphi(x) - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} x^{k-1}\right) dx + \sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \frac{1}{\lambda+k},$$

$$(x_-^\lambda, \varphi(x)) = \int_1^\infty x^\lambda \varphi(-x)dx + \int_0^1 x^\lambda \left(\varphi(-x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} x^{k-1}\right) dx$$
$$+ \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \frac{1}{\lambda+k},$$

так что

$$(|x|^\lambda, \varphi(x)) = \int_1^\infty x^\lambda (\varphi(x) + \varphi(-x))dx + \int_0^1 x^\lambda \left(\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{(2k-2)}(0)}{2(k-1)!} x^{2(k-1)}\right) dx$$
$$+ \sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{(2k-2)}(0)}{(2(k-1))!} \frac{2}{\lambda+2k-1}, \qquad \operatorname{Re}\lambda > -2n-1$$

$$(|x|^\lambda \operatorname{sgn} x, \varphi(x)) = \int_0^1 x^\lambda \left(\varphi(x) - \varphi(-x) - 2\sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{(2k-1)}(0)}{2(k-1)!} x^{2k-1)}\right) dx +$$
$$\int_1^\infty x^\lambda (\varphi(x) - \varphi(-x))dx + \sum_{k=1}^n \frac{\varphi^{(2k-1)}(0)}{(2k-1))!} \frac{2}{\lambda+2k}, \qquad \operatorname{Re}\lambda > -2n-2$$

Также как и в (1), в более узких областях $-2n+1 > \operatorname{Re}\lambda > -2n-1$ и $-2n > \operatorname{Re}\lambda > -2n-2$ соответственно последние формулы можно переписать в виде единых интегралов.

Функция $|x|^\lambda$ определена при всех $\lambda \neq -1, -3, ...$. В точке $\lambda = -2n-1$ она имеет полюс, равный $\frac{2}{(2n)!}\delta^{(2n)}(x)$. В точках $\lambda = -2, -4, ...$ функция регулярна и обозначается x^{-2}, $x^{-4}, ...$

Функция $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ определена при всех $\lambda \neq -2, -4, \ldots$. В точке $\lambda = -2n$ она имеет полюс, равный $\frac{-2}{(2n)!}\delta^{(2n-1)}(x)$. В точках $\lambda = -1, -3, \ldots$ функция регулярна и обозначается x^{-1}, x^{-3},...

Обобщенные функции $(x \pm i0)^\lambda$ По определению, $(x \pm i0)^\lambda = \lim_{y\to\pm 0}(x+iy)^\lambda$, где

$$(x+iy)^\lambda = e^{\lambda(\log|x+iy| + i\arg(x+iy))}, \qquad -\pi < \arg(x+iy) < \pi$$

При фиксированном $y \neq 0$ функция $(x+iy)^\lambda$ - непрерывная функция вещественного аргумента x, а ее предел при $y \to \pm 0$ описывается как

$$(x+i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\pi\lambda}x_-^\lambda, \qquad (x-i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{-i\pi\lambda}x_-^\lambda$$

Согласно конструкции, эти обобщенные функции голоморфны по λ. В частности, определены при целых отрицательных λ. Вычислим эти значения, пользуясь приведенными описаниями аналитических продолжений функций $|x|^\lambda$ и $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$. Имея в виду равенства $x_\pm^\lambda = 1/2\left(|x|^\lambda \pm |x|^\lambda \operatorname{sgn} x\right)$, получаем

$$(x \pm i0)^\lambda = |x|^\lambda \frac{1+e^{\pm i\pi\lambda}}{2} + |x|^\lambda \frac{1+e^{\pm i\pi\lambda}}{2}$$

При стремлении x к отрицательному целому числу одно слагаемое регулярно, во втором ноль сокращает полюс, так что в итоге получаем соотношения

$$\begin{aligned}(x+i0)^{-n} =& x^{-n} - \pi i \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x),\\ (x-i0)^{-n} =& x^{-n} + \pi i \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x)\end{aligned}$$

частным случаем которых являются формулы Сохоцкого

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+i0} =& \frac{1}{x} - \pi i\delta(x),\\ \frac{1}{x-i0} =& \frac{1}{x} + \pi i\delta(x)\end{aligned}$$

Ответы к 10-минутке и задаче 2 семинара

1.Действие образующих $e = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ алгебры Ли $sl(2,\mathbb{R})$ в пространстве D_χ основной серии в некомпактной реализации задается формулой

$$e = (s-1)z - z^2\frac{d}{dz}, \qquad h = (1-s) + 2z\frac{d}{dz}, \qquad f = \frac{d}{dz}.$$

Ответ не зависит от значения ε.

2. Действие образующих $E_0 = \begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$ алгебры $su(1,1)$ в пространстве D_χ основной серии в компактной реализации при $\varepsilon = 0$ задаются формулами

$$\begin{aligned}E_0 =& 2iw\frac{d}{dw}, \qquad E_1 = \frac{s-1}{2}\left(w + w^{-1}\right) + \left(1-w^2\right)\frac{d}{dw},\\ E_2 =& \frac{s-1}{2}i\left(w - w^{-1}\right) - i\left(1+w^2\right)\frac{d}{dw}, \qquad \text{при } \varepsilon = 0,\end{aligned}$$

Действие образующих $h = -iE_0$, $e = (E_1 - iE_2)/2$ и $f = (E_1 + iE_2)/2$ комплексификации алгебры Ли тем самым имеют вид

$$h = 2w\frac{d}{dw}, \qquad e = \frac{s-1}{2}w - w^2\frac{d}{dw}, \qquad f = \frac{s-1}{2}w^{-1} + \frac{d}{dw}$$

При $\varepsilon = 1$ к формулам для действия образующих E_0, E_1 и E_2 добавляются слагаемые i, $-\frac{1}{2}\left(w - w^1\right)$ и $-\frac{i}{2}\left(w + w^1\right)$ соответственно.

Векторы $u_{2n} = w^n = e^{2in\theta}$ образуют базис пространства представления D_χ при $\varepsilon = 0$, а векторы $u_{2n+1} = \zeta w^n = e^{i(2n+1)\theta}$ образуют базис пространства представления D_χ при $\varepsilon = 1$. Формула действия комплексной оболочки алгебры Ли в них получается одинаковой:

$$hu_n = nu_n, \qquad eu_n = \frac{1}{2}(s-1-n)u_{n+2}, \qquad fu_n = \frac{1}{2}(s-1+n)u_{n-2}$$

В представлениях с $\varepsilon = 0$ встречаются только векторы с четным индексом, в представлениях с $\varepsilon = 1$ - с нечетным.

Литература

1. И.М.Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин, Обобщенные функции 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, гл. VII

2. И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов, Обобщенные функции 5. Обобщенные функции и действия над ними, гл. I $ 3