Группы и алгебры Ли II. Семинары 29.03.17-5.04.17

Задача 1. Опишите аналитическое продолжение эйлерова интеграла $\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ на всю комплексную плоскость параметра z. Найдите отсюда полюса Γ-функции и вычеты в них.

Задача 2. Зная действие комплексификации алгебры Ли $su(1,1)$ в базисе функций, собственных относительно компактной подгруппы,

$$h\,u_n = nu_n, \qquad e\,u_n = \frac{1}{2}(s-1-n)u_{n+2}, \qquad f\,u_n = \frac{1}{2}(s-1+n)u_{n-2}$$

а) найдите значения параметров s и ε, при которых представление D_χ основной серии приводимо;

б) опишите структуру подмодулей в приводимых представлениях

в) найдите матричные коэффициенты сплетающего оператора $A_\chi : D_\chi \to D_{-\chi}$.

Задача 3. Проверьте инвариантность скалярного произведения

$$(f(w), g(w)) = \int_{|w<1|} f(w)\bar{g(w)}(1-|w|^2)^{-s-1}dwd\bar{w}$$

в представлении дискретной серии группы $SU(1,1)$, реализованном в простанстве аналитических функций в единичном круге, для которых сходится интеграл, определяющий $(f(w), f(w))$ с действием $T_g f(w) = (\bar{\alpha}+\beta w)^{s-1} f\left(\frac{\alpha w+\bar{\beta}}{\beta w+\bar{\alpha}}\right)$

Задача 4. Найдите скалярное произведение аналитических функций z^k и z^m в пространстве представления F_n^+ дискретной серии группы $SU(1,1)$ (в реализации на единичном диске)

Задача 5. Найдите нормы базисных собственных относительно компактной подгруппы $SU(1,1)$ векторов (см.задачу 2) в представлении дискретной серии F_n^+. Какие аналитические функции соответствуют этим векторам?

Задача 6. Покажите, что представление представление $D_{0,1}$ основной серии распадается в прямую сумму двух (называемыми пределами дискретной серии). Опишите разложение и соответствующие сплетающие операторы.

Задача 7. а) Представления $F_s^\pm$ дискретной серии получаются друг из друга внешним автоморфизмом - сопряжением группового элемента матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

б) Опишите реализацию F_s^- в терминах функций, аналитичных вне единичного круга

Задача 8. Покажите. что сплетающий оператор $A_\chi : D_\chi \to D_{-\chi}$ между представлениями основной серии группы $SL(2,\mathbb{R})$ может быть записан в виде интеграла по группе N верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали

$$A_\chi f(g) = \int_N f(w_0 ng)dn, \qquad \text{где} \quad w_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 9. Функции $\varphi_p^{(m)}(g) = \alpha^{-1-m-p}\beta^p$, где $m = 1,2,...,$ $p = 0,1,2,...$ лежат в $L_2(G)$. Замыкание этого пространства инвариантно относительно правых сдвигов и как представление изоморфно представлению дискретной серии. Докажите