

Инвариантные ансамбли.

Вигнер предположил, что гамильтониан ядра можно смоделировать большой случайной матрицей, симметричной которой совместны с симметрией рассеивающей физ. системы. А именно, состояние квантовой системы задается вектором в гильбертовом пространстве, а наблюдаемые величины самосопряженными операторами. Энергия представляется оператором Гамильтона, собственные значения которого и есть измеримые уровни энергии, на которых может находиться система. Можно думать о гамильтониане большой системы, как о большой эрмитовой матрице. Такая матрица в принципе может быть блоч-диагональной; каждый блок соответствует своему набору квантовых чисел, и определяет инвариантное подпространство. При переходе к случайным матрицам предполагается, что уровни соответствующие разным блокам полностью некоррелированы, тогда как внутри каждого блока ведут себя как собств. значения случайных матриц. Чтобы понять какие свойства должны обладать случайные матрицы, обратимся к понятию симметри-

коррелированными
Состояние физ. системы задается векторами в гильбертовом пространстве (упоминаемыми на произвольной фазовой поверхности).

Физически измеримые величины:

Матожидание наблюдаемых: $E(A) = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$.

Вероятности переходов: $P(\psi \rightarrow \varphi) = |\langle \varphi | \psi \rangle|^2$.

Симметрии - преобразование пространства, времени или внутр. степеней свободы, которые не зависят физика, т.е. вероятностей перехода. Преобразование симметрий можно реализовать как действие операторов на Гильбертовом пространстве.

Теорема (Вигнер) любое преобразование симметрии представляется в виде либо унитарного либо антиунитарного оператора.

Опр.

Антиунитарный оператор A : $\forall \varphi, \psi \quad 1, |\langle A\varphi | A\psi \rangle| = |\langle \varphi | \psi \rangle|$

$$2. A(\alpha|\varphi\rangle + \beta|\psi\rangle) = \alpha^*|A\varphi\rangle + \beta^*|A\psi\rangle.$$

Антиунитарный оператор A представим в виде

$$A = KC,$$

где K - некоторый унитарный оператор, а C - оператор комплексного сопряжения.

Таким образом существование непрерывной группы симметрий предполагает инвариантность квантовой системы относительно некоторой унитарной группы. Поскольку мы хотим представить гамильтониан в виде случайной матрицы, потребуем, чтобы мера на матрицах была инвариантна относительно данной группы.

Конкретный же группа симметрии меры и вид случайных матриц определяется наличием или отсутствием в системе симметрии по отношению к обращению времени.

Опр.: T - оператор обращения времени, т.е. $\forall |\varphi_0\rangle$

$$|\varphi_t\rangle = e^{-iHt} |\varphi_0\rangle$$

$$|T\varphi_0\rangle = \alpha e^{-iHt} |T\varphi_t\rangle \quad |\alpha| = 1$$

Опр. Одуальный оператор $A^R = TAT^{-1} \quad T^2 = \mathbb{1}$
Самодуальный оператор: $A^R = A$

Пусть гамильтониан самодуален: $H = T^{-1}HT$

Ур-е Шредингера: $i\hbar \partial_t |\varphi\rangle = H|\varphi\rangle,$

За малое время δt

$$|\varphi_t\rangle = \left(1 - i\frac{H\delta t}{\hbar}\right) |\varphi_0\rangle$$

$$T|\varphi_0\rangle = \left(1 - i\frac{HT\delta t}{\hbar}\right) T|\varphi_t\rangle \Rightarrow |\varphi_t\rangle = \left(1 + \frac{T^{-1}HT\delta t}{\hbar}\right) |\varphi_0\rangle$$

т.к. $T^{-1}HT = H \Rightarrow T^{-1}iT = -i \Rightarrow T$ - антиунитарный оператор.

Потребуются, чтобы случайные матрицы были самодуальны. Какие ограничения это накладывает?

T представим в виде $T = K C$, где K - фиксир. унитарный оператор, а C - произв. сопряжение.

Каков выбор K ?

При унитарном преобр: $K C = T \rightarrow U T U^\dagger = U K C U^\dagger = U K U^\dagger C$

$$K \rightarrow U K U^\dagger$$

$$\begin{matrix} \swarrow \\ C U^\dagger = U^\dagger C \\ \searrow \\ C^2 = 1 \end{matrix}$$

$$T^2 = \gamma \mathbb{1} \quad |\gamma| = 1$$

$K C K C = K K^* C C = K K^* = \gamma$, напомним K - унитарно

$$K K^\dagger = \mathbb{1} \Rightarrow C K C C^\dagger K^\dagger C = K^* K^\dagger = \mathbb{1} \Rightarrow K = K K^* K^\dagger = \gamma K^\dagger = \gamma^2 (K^\dagger)^\dagger$$

$$\gamma^2 = \pm 1 \quad \parallel \quad \gamma^2 K$$

1) $\gamma = +1$ $K = K^\dagger$ - симметр. унитарная матрица.

Модно симметр. унитарную матрицу можно предст. в виде $K = V V^\dagger$, где V - унитарная матрица

$$(K = e^{iH} = e^{iH^\dagger} = K^\dagger \Rightarrow H = H^\dagger)$$

Преобразованием $V^{-1} K (V^\dagger)^{-1} = V^\dagger K V^{-1} = \mathbb{1}$ можно сделать матрицу K единичной: $T = C$

Таким образом в данном базисе $H = C H C \Rightarrow$

$H = H^\dagger$ - действительная симметрическая матрица.

Мы хотим представлять гамильтониан, как выборку из множества. Поскольку физические картины не зависят от выбора базиса, будем выбирать такой базис, где $K = \mathbb{1}$, а

$H = H^\dagger$ - действ. матрица. Такие гамильтонианы связаны между собой ортогональными преобраз.

$$H' = O H O^T \quad O \in SO(N) \quad \boxed{O K O^T = K = \frac{I}{N}}$$

Опр. Ортогональный гауссовский ансамбль.

Ансамбль вещественных симметрических матриц $X \in \mathbb{R}^{N \times N}$ таких что матричные элементы на диаг. и выше независимы и $X_{ii} \sim \mathcal{N}$, $X_{ij} \geq X_{ji} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{N}$, $i > j$.

(можно представить $X = \frac{1}{2}(Y + Y^T)$, $Y_{ij} \sim \mathcal{N}$ - i.i.d), т. е.

$$\mu(dx) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^N e^{-\frac{X_{ii}^2}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq N} e^{-\frac{X_{ij}^2}{2}} dx_{ij}$$

Замечание. следа инвариантно относительно орт. преобраз.

$$\mu(dx) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} X^2} dx$$

$$Y = O^T X O$$

$$\mu(dx) = \mu(dy)$$

2) $\sigma = -1$ $K = -K^T$ кососимметричные унитарные матрицы. Любой кососимметричный унитарный оператор можно привести к канонической форме:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad Z^{-1} = -Z$$

чтобы K был не вырожденным все матрицы должны иметь четное число строк и столбцов. Тогда условие самодуальности записывается в виде:

$$H = Z C H C Z^{-1} = Z H^T Z^{-1} = -Z H^T Z$$

Дальнейшее преобразование должно сохранять Z :

$$Z = B Z B^T$$

$$B^T = -Z B^T Z = B^R \quad \text{такие матрицы образуют}$$

N -мерную унитарную группу:

Удобно думать о матрицах в терминах векторов-монов: $1, e_1, e_2, e_3$

$$e_i^2 = e_j^2 = e_k^2 = -1 \quad e_i e_j = \varepsilon_{ijk} e_k$$

Можно сопоставить кватернионным матрицы: $e_i = i \sigma_i$

Тогда эрмитовы самоудовлетворяющиеся матрицы, а так же унитарные матрицы B , удовл. $B^R = B^T = B^{-1}$ это кватернионно-вещественные матрицы;

т.е. матрицы с matr. элементами $q = q^0 + q^{(1)}e_1 + \dots + q^{(3)}e_3$ и эрмитовые матрицы имеют вид:

$$H = H^0 \otimes \mathbb{1}_2 + H^{(1)} \otimes e_1 + H^{(2)} \otimes e_2 + H^{(3)} \otimes e_3,$$

где H^0 - симметричная, а $H^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$) - кососимметричные действительные матрицы.

Потребуем теперь, чтобы наши случайные матрицы были эрмитовыми и кватернионно-действительными были бы равномерно распределены наиболее случайным образом относительно меры инвариантной относительно симплект. преобразования.

Вопр. Гауссов Симплект. Ансамбль (GSE)

Ансамбль эрмитовых кватернионно-действительных матриц где кватернионные матричные элементы независимы, но равномерно распределены сл. в.:

$$q_{ii}^{(0)} \sim N[0, 1/2] \quad q_{ij}^{(i)} \sim N\left(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \quad i > j$$

Иметь Y - кв. дейст., $g_{ij}^{(i)} \sim N(0, 1/2)$, тогда $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y + Y^T)$

Плотность вероятности:

$$\mu(dx) = e^{-2 \sum_{i=1}^n (q_{ii}^{(0)})^2 - 4 \sum_{\substack{i < j \\ k=1}}^n (q_{ij}^{(k)})^2} \prod_i dq_{ii} \prod_{k=1}^3 \prod_{i < j} dq_{ij}^{(k)}$$

$$e^{-2 \text{Tr} X^2}$$

Утв. (ф.3.) Спектр эрмитовой квадратично-действ. матрицы дважды вырожден.

При отсутствии антиунитарной симметрии, матрица предполагается произвольной эрмитовой, а функции сопряжения эрмитовой матрицы - $U(N)$.

Опр. Гауссов унитарный ансамбль. $GU\mathbb{E} (\beta=2)$

$X = X^\dagger$; x_{ij} - незав. сл. величины при $i \leq j$

$$x_{ii} \sim N(0, 1/\sqrt{2}) \quad x_{ij} = \text{Re } X_{ij} + i \text{Im } X_{ij} \quad \text{Re } X_{ij}, \text{Im } X_{ij} \sim N(0, \frac{1}{2})$$

Мера:

$$\mu(dx) = \frac{1}{Z} e^{-\sum_i x_{ii}^2} e^{-2 \sum_{i < j} |x_{ij}|^2} \prod_i dx_{ii} \prod_{k=1}^2 \prod_{i < j} d\text{Im } x_{ij} d\text{Re } x_{ij}$$

$$= \frac{1}{Z} e^{-\text{Tr} X^2} dx$$

Распределение собственных значений.

Теорема.

Распределение плотности вероятности собственных значений β -ансамбля.

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = |\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n)|^\beta e^{-\frac{\beta}{2} \sum_i \lambda_i^2}, \quad \text{где}$$

$$\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) = \text{det} (X_i^{\mu-j})$$

Доказательство: (где $\beta = 1$)

У невырожденной симметричной матрицы $X \in \mathbb{R}^{N \times N}$ $\frac{N(N+1)}{2}$ степеней свободы. Из них N соответствует значениям μ и $\frac{N(N-1)}{2}$ параметров соответствует векторов μ , из которых можно построить матрицу $O(p_1, \dots, p_{N(N-1)/2})$:

$$X = O^T \Lambda O \quad \text{где} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N).$$

Поскольку плотность зависит только от λ :

$$P(x) = e^{-\frac{1}{2} \text{Tr}(X^2)} = e^{-\frac{1}{2} \sum \lambda_i^2},$$

достаточно перейти к переменным λ, ρ в каноническом якобиане перехода:

$$J = \left| \frac{\partial X_{ij}}{\partial (\lambda, \rho)} \right|$$

Врт: преобр:

$$X = O^T \Lambda O \quad \delta X = \overset{O^T O}{\delta O^T} \Lambda O + O^T \delta \Lambda O + O^T \Lambda \overset{O O^T}{\delta O}$$

$$\underline{O^T O = I \quad \delta(O^T O) = 0 = \delta O^T \cdot O + O^T \cdot \delta O}$$

$$\Leftrightarrow \delta O^T \Lambda O + O^T \delta \Lambda O - O^T \Lambda O \delta O^T O$$

$$= O^T (O \delta O^T \Lambda - \Lambda O \delta O^T + O^T \delta \Lambda O) O =$$

$$= O^T \delta \tilde{X} O \quad \delta \tilde{X} = \delta \Lambda + [O \delta O^T, \Lambda]$$

$$\delta X \xrightarrow[\delta=1]{O} \delta \tilde{X} \xrightarrow[\delta=1]{j=1} (\delta \Lambda, \rho) \quad \Lambda_{ij} = \delta_{ij} \lambda_j$$

$$\delta \tilde{X}_{ij} = \delta_{ij} \delta \lambda_i + \sum_k \omega_{jk} \delta_{kj} \lambda_j - \delta_{ik} \lambda_k \delta \omega_{kj}$$

Новые переменные $\delta \lambda_i, \delta \omega_{jk}$:

$$J = \frac{\partial \delta \tilde{X}_{ij}}{\partial (\delta \lambda_i, \delta \omega_{jk})} = \left| \begin{matrix} \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_i - \lambda_j, \dots \end{matrix} \right| = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j).$$

$$\mu(dx) = \frac{1}{z} e^{-\frac{1}{2} \sum \lambda_i^2} |\Delta_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)| d\lambda_1 \dots d\lambda_N dW$$

Интегрируя по dW погуглим утв. теоремы.

В док-ве не использовалась инвариантность меры Лебесга на симметрических матрицах по отношению к ортогональным преобразованиям. Это утверждение будет использоваться далее. Докажем его

Предположим: Пусть $X = X^T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ и $Y = O X O^T$, $O \in SO(N)$

$$dX := \prod_i dx_{ii} \prod_{i < j} dx_{ij} \quad \text{Тогда } \det \left(\frac{\partial Y_{ij}}{\partial X_{kl}} \right) = \pm 1, \text{ т.е.}$$

Док-во:

Заметим, что ортогональное преобраз. сохраняет следы степеней: $\text{Tr } X^2 = \text{Tr } Y^2$

Заметим независимые компоненты матрицы в виде векторов из $N(N+1)/2$ компонент

$$(X_{11}, \dots, X_{NN}, X_{12}, \dots, X_{1N}, \dots) \quad Y = \dots$$

$$\text{Условие сохр следа} \quad \sum_{ii} X_{ii}^2 + 2 \sum_{i < j} X_{ij}^2 = \sum_{ii} Y_{ii}^2 + 2 \sum_{i < j} Y_{ij}^2$$

Это можно в векторах это можно записать в виде:

$$\langle X, DX \rangle = \langle Y, DY \rangle,$$

$$\text{где матрица } D = \text{diag} \left(\underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{2, \dots, 2}_{n(n-1)/2} \right)$$

$$\text{При этом } Y_{ij} = \sum_{ie} \sum_{ek} O_{ie}^T X_{ek} O_{kj} = X_{ek} O_{ie} O_{jk}, \text{ или в}$$

$$\text{векторах } Y = LX, \text{ где } L_{(ij)(ek)} = O_{ie} O_{jk}$$

$$\text{Получим где } \forall X \quad \langle X, DX \rangle = \langle LX, D LX \rangle.$$

Предложение. Пусть $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $d_i \neq 0$, и где $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n$

$$\langle L\sigma, DL\sigma \rangle = \langle \sigma, D\sigma \rangle.$$

Тогда $\det L = \pm 1$

Доказано: $L^T DL = D \Rightarrow (\det L)^2 = 1 \quad \square$

Круговые ансамбли:

Цель: вместо эрмитовых (симметрических, квадратично-вещественных симметрических) рассмотреть унитарные матрицы: $H \rightarrow e^{iH}$.

Опр. Круговой ортогональный, $SOE, \beta=1$ (унитарный, $CU, \beta=2$) или комплексный, $CSU, \beta=4$) ансамбль — это пространство унитарных симметрических (прожженных; скалярных или кватернионных) матриц, снабженное мерой, инвариантное относительно присоединенного действия ортогональной (унитарной; комплексной) группы.

1) Ортогональный: Пусть $S = S^T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ — симметрическая унитарная матрица. Для каждой симметр. унитарной S найдется унитарная матрица U , $UU^T = I$, т.е. $S = U^T U$.

Определим окрестность $S + dS = U^T (I + dM) U$, где dM — вещ. симметрическая матрица. Определим элемент объема:

$$\mu(dS) = \prod_i dM_{ii} \prod_{k < j} dM_{kj}.$$

Матрица U — не единственна, однако μ — не зависит от ее выбора.

Предложение: Пусть $S = UU^T = VV^T$ и пусть

$\mu(dS)$ построено по U , а $\mu'(dS)$ по V .

Тогда $\mu = \mu'$.

$$\text{Доказано: } \mu(ds) = \left| \frac{\partial dM}{\partial dM'} \right| \mu'(ds)$$

$$ds = U^T dM U = V^T dM' V \quad dM = R^{-1} dM' R, \quad R = VU^{-1}$$

$$R R^T = V U^{-1} (U^{-1})^T V^T = V (U^T U)^{-1} V^T = V (V^T V)^{-1} V^T = \mathbb{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R \in SO(N) = \left\{ \frac{\partial dM}{\partial dM'} \right\} = \mathbb{1} \quad \text{но учёт о инвариантности меры Лебега.}$$

Доказать то же самое для CUE и CSE.

Используем меру на матрицах $P(ds) = \frac{\mu(ds)}{V}$, где $V = \int \mu(ds)$.

Совместная плотность параметров:

Для моды унитарной симметрич. матрицы S
 $\exists O \in SO(N); O S O^T = \Lambda = \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N}); \theta_i \in [0, 2\pi)$

Задача найти плотность относительно меры Лебега:

$$\mu(d\Lambda) = \frac{1}{(2\pi)^N} \prod_{i=1}^N d\theta_i.$$

Мы хотим перейти от $\mu(ds) = \mu(dM) = \prod_{i,j} dM_{ij}$ к $\mu(d\Lambda) \mu(dO)$.

$$\text{Пусть } S = O^T \Lambda O = U^T U \quad d(O O^T) = dO \cdot O^T + O \cdot dO^T = 0$$

$$ds = U^T dM U = dO^T \Lambda O + O^T d\Lambda O + O^T \Lambda dO$$

$$\begin{aligned} i O U^T dM U O^T &= O dO^T \Lambda + \Lambda dO \cdot O^T + d\theta \Lambda i = \\ &= [0, dO^T, \Lambda] + d\theta \cdot \Lambda \cdot i \end{aligned}$$

Выберем U так, что $OU^T = \sqrt{\Lambda}$

$$i \sqrt{\Lambda} dM \sqrt{\Lambda} = [O dO^T, \Lambda] + d\theta \cdot \Lambda \cdot i \quad \begin{matrix} O dO^T = d\Omega \\ d\Omega_{ij} = d\Omega_{jk} \end{matrix}$$

$$dM = -i(\Lambda^{-1/2} O dO^T \Lambda^{1/2} - \Lambda^{1/2} O dO^T \Lambda^{-1/2}) + d\theta$$

$$dM_{ij} = \frac{1}{i} \left(\delta_{ik} e^{-\frac{i\theta_k}{2}} d\Omega_{ke} \delta_{ej} e^{\frac{i\theta_j}{2}} - \delta_{ik} e^{\frac{i\theta_k}{2}} d\Omega_{ke} \delta_{ej} e^{-\frac{i\theta_j}{2}} \right) + d\theta_i \delta_{ij} = \frac{1}{i} d\Omega_{ij} \left(e^{\frac{i\theta_j - \theta_k}{2}} - e^{\frac{i(\theta_k - \theta_j)}{2}} \right) \neq d\theta_i \delta_{ij}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) d\Omega_{ij} + d\theta_i \delta_{ij}$$

$$j = \frac{\partial M_{ij}}{\partial \Omega_{ke}} = \begin{cases} 2 \sin\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) d\Omega_{ij} & ij = ke, \quad i \neq j \\ d\theta_i & i = j = k = e \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mu(d\Omega) \propto |J| d\Omega d\theta = \prod_{k_j} \left| 2 \sin\left(\frac{\theta_i - \theta_j}{2}\right) \right| \prod_i d\theta_i \prod_{k_j} d\Omega_{ij}$$

$$= \prod_{i < j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}| \prod_i d\theta_i \prod d\Omega_{ij}$$

Теорема:

Плотность себя в значениях в круговых β -ансамблях

$$P_{\beta}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \frac{1}{Z_{\beta}} \prod_{k_j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^{\beta}$$

Ансамбль Вишера.

Пусть X - вещественная (комплексная; кватерн. вещественная) матрица $n \times m$, $n < m$, с независимыми нормально распредел. элементами с дисперсией независимых вещественных компонент $1/\beta$ и $A = X^T X$.

$$\text{Тогда } IP(dA) = \frac{1}{C_{\beta n}} e^{-\frac{\beta}{2} \text{Tr}(A)} (\det A)^{\frac{\beta}{2}(n-m+1)-1} dA$$

После перехода к собственным значениям λ
имеем:

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\beta}{Z} \sum_{i=1}^n \lambda_i} \prod_i \lambda_i^{\frac{\beta}{Z} (n-m+1) - 1} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta$$
