В предыдущих лекциях мы ввели несколько ансамблей случайных матриц и вывели плотность распределение их собств. значений.

Это ф-ция многих переменных, чтобы понять что-то о том как выглядит распределение собственных значений нужно обладать менее детальной информацией. В частности нас будет интересовать предел матриц большого размера. Поэтому получаемые величины должны быть пригодны для асимптотического анализа. Для этого нужны такие величины как частные распределения, корреляционные функции и т.д. Замечательным свойством введённых матричных β-ансамблей является то, что от распределения всех собственных значений можно спуститься к локальным характеристикам, таким как одно-двухточечные корреляционные ф-ии и др.
В пределе больших матриц эти величины будут характеризовать предельную форму распределение собственных значений и флуктуации около неё.

Перед тем как перейти к точным вычислениям вернемся к вопросу о предельной плотности собств. значений на примере β-ансамблей.

Точная формула для распред. собственных значений имеет вид:

$$P(\lambda_1,\dots,\lambda_N) = Z_{N,\beta}^{-1}\, e^{-\beta\sum_i V(\lambda_i)} \prod_{i<j} |\lambda_i-\lambda_j|^\beta ,$$

где $V(x)=\frac{x^2}{2}$ для гауссовых ансамблей и

$V(x)=\frac{x}{2}-a\ln x$ для Уишерта и т.д.

Запишем распределение в виде $P(\underline{\lambda}) = e^{-\beta E(\underline{\lambda})}$

где $E(\underline{\lambda}) = \sum_i V(\lambda_i) + \sum_{i<j} \ln|\lambda_i-\lambda_j|$.

Это есть распределение Гиббса для системы заряженных частиц, движущихся по прямой в потенциале $V(x)$, взаимодействующих через двумерный Кулоновский потенциал.

$$Z=\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\beta E(\underline{\lambda})}\, d^N\lambda$$ – статсумма кулоновского газа.

Чтобы сделать систему конечной перемасштабируем переменные. $\lambda=\sqrt{N/2}\,\tilde{\lambda}$. (Эта нормировка использ. в 1-й лекции)

Тогда $P(\underline{\tilde{\lambda}})=\frac{1}{\tilde{Z}}e^{-\beta N^2\tilde{E}(\underline{\tilde{\lambda}})}$, где $\tilde{E}(\underline{\lambda})=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\tilde{V}(\tilde{\lambda}_i)-\frac{1}{2N^2}\sum_{i\neq j}\ln|\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_j|$

и $\tilde{V}(x)=N^{-1}V(\sqrt{N/2}\,\lambda_i)$

Предел $N\to\infty$ соответствует случаю нулевой температуры, когда реализуется (т. е. даёт вклад в статсумму) распределение корней, при котором энергия минимальна. Задача нахождения оптимальной конфигурации корней может быть поставлена как вариационная задача для эмпирического спектрального распределения.

Пусть $\mu=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{\lambda_i}$ – э. с. м. Тогда

$Z\simeq e^{-\beta N^2 f}$, где свободная энергия даётся решением вариационной задачи

$$f=\inf_{\mu:\,\mu(\mathbb{R})=1}E(\mu)\ ;\quad E(\mu)=\int_{\mathbb{R}}\tilde{V}(x)\,d\mu(x)-\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\ln|x-y|\,d\mu(x)\,d\mu(y)$$

$$\delta\left(E-\alpha\left(\int_{\mathbb{R}}\mu(dx)-1\right)\right)=0$$

Решение вариационной задачи удовлетворяет уравнению

$$\tilde{V}(x)-\int\ln|x-y|\,d\mu(y)-\alpha=0 \quad \text{для } \forall x\in \operatorname{Supp}\mu(x)$$

$$\tilde{V}'(x)-⨍\frac{d\mu(y)}{x-y}=0$$ ($x\in\operatorname{Supp}\mu$, а интеграл в смысле главного значения.)

Введем преобр. Стильтьеса $s(z)=\int\frac{d\mu(y)}{y-z}$ $z\in\mathbb{C}$

Формула Сохоцкого: $s(z+i\varepsilon)+s(z-i\varepsilon)=2⨍\frac{d\mu(y)}{x-y}$

Получим задачу Римана-Гильберта для преобразования Стилтьеса:

$$S(x+i\varepsilon)+S(x-i\varepsilon)+2\tilde{V}'(x)=0 \quad \forall x \in \operatorname{supp}\mu$$

S - аналитическая в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ф-ция $\lim\limits_{y\to\infty} iy\, S(iy)=1$.

Решение для $V(x)=\frac{x^2}{2}$; $\tilde{V}=\frac{x^2}{4}$

Введем $P(x)=2\tilde{V}'(x)S(x)-S^2(x)=$

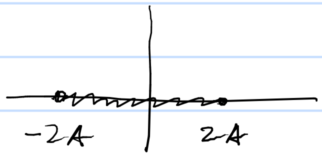
$$P(x+i\varepsilon)-P(x-i\varepsilon)=\left(\tilde{V}'(x)2-\left(S(x+i\varepsilon)+S(x-i\varepsilon)\right)\right)\left(S(x+i\varepsilon)-S(x-i\varepsilon)\right)=0$$

т. к. одна скобка зануляется при $x\in\operatorname{supp}\mu$ а другая на остальной части $\mathbb{C}$, т. е. $P(x)$ - аналитично везде в $\mathbb{C}$ и $S(x)\sim\frac{P(z)}{V'(z)}\sim\frac{1}{z}$ при $z\to i\infty$.

Получим $P(z)$ - многочлен степени на 1 меньше чем $V'(z)$, т. е. $P(z)=A=\mathrm{const}$

$$A-xS(x)+S^2(x)=0 \qquad S(x)=\frac{x\pm\sqrt{x^2-4A}}{2}=\frac{x+i\sqrt{4A-x^2}}{2}$$

$$S(x)\underset{x\to i\infty}{\simeq}\frac{x-x\left(1-\frac{4A}{2x^2}\right)}{2}\underset{x\to i\infty}{\simeq}\frac{A}{x}\Rightarrow A=1$$



$\mu(dx)=f(x)dx$ Плотность $f(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}S(x)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{x^2-4}$

Как и следовало ожидать мы получили закон Вигнера.

Перейдем к точному вычислению характеристик β-ансамблей. Рассмотрим случай $\beta=2$.

Попробуем вычислить нормировочный множитель

$$Z=\frac{1}{N!}\int_{\mathbb{R}^N} d\lambda_1\dots d\lambda_N\ \Delta(\lambda_1,\dots,\lambda_N)^2\prod_{i=1}^N e^{-V(\lambda_i)},$$

где $\Delta(\lambda_1,\dots,\lambda_N)=\det(\lambda_i^j)_{0\le i,j\le N-1}$

Вес $e^{-V(x)}$ задает скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R},e^{-V(x)}dx)$. $\langle f|g\rangle=\int f(x)g(x)e^{-V(x)}dx$.

Обозначим $m_i(\lambda)=\lambda^i$ $i=0,1,2,\dots$

$$Z=\frac{1}{N!}\int_{\mathbb{R}^N} d^N\lambda\ \det(m_{i-1}(\lambda_j))_{1\le i,j\le N}\ \det(m_{k-1}(\lambda_s))_{1\le k,s\le N}\prod e^{-V(\lambda_i)}.$$

Формула (Andreief, (1883)).

$$\frac{1}{N!}\int_{\Omega^N} d^N x\ \det(f_i(x_j))_{1\le i,j\le N}\det(g_k(x_s))_{1\le k,s\le N}\,d^N x=\det\left(\int_\Omega g_i(x)f_j(x)dx\right)_{1\le i,j\le N}$$

Получим: $Z=\det(\langle m_{i-1}|m_{j-1}\rangle)_{1\le i,j\le N}=$

Пусть $M_n:=\int_{\mathbb{R}}\lambda^n e^{-V(\lambda)}d\lambda$

Тогда $Z=\det_{1\le i,j\le N} M_{i+j}$ — матрица Ганкеля

$Z=\det M_{i+N-j+1}\times(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}$ — матрица Тёплица

Пусть $p_i(\lambda),\tilde{p}_i(\lambda)$ — два семейства унитарных многочленов степени: $p_i(\lambda)=\lambda^i+p_{i-1}\lambda^{i-1}+\dots$ $\tilde{p}_i(\lambda)=\lambda^i+\tilde{p}_{i-1}\lambda^{i-1}+\dots$

Добавление к строкам матрицы других строк с произвольными коэффициентами не меняет определитель:

$$\Delta(\lambda_1 \dots \lambda_N) = \det\left(p_{i-1}(\lambda_j)\right)_{0 \le i,j \le N}$$

Пусть $H_{i,j} := \langle p_{i-1} | \tilde{p}_{j-1} \rangle$, $1 \le i, j \le N$

Тогда $\boxed{Z = \det\limits_{1 \le i,j \le N} H_{i,j}}$ — не зависит от выбора $p_i, \tilde{p}_i$

Корреляционные ф-ии и ядро

Рассмотрим меру $d\mathbb{P}(\underline{\lambda}) = p(\lambda_1, \dots, \lambda_N)\, d\lambda_1 \dots d\lambda_N$ на $\mathbb{R}^N$, симметричную относительно перестановок $\lambda_1, \dots, \lambda_N$

Пусть $A_1, \dots, A_m$ — непересекающиеся ограниченные борелевские подмножества $\mathbb{R}$.

Пусть $\nu_i = \#\{k : \lambda_k \in A_i\}$, $i = 1, \dots, m$.

Факториальная моментная мера

$$M_k\left(A_1^{k_1} \times \dots \times A_m^{k_m}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{m} \frac{\nu_i!}{(\nu_i - k_i)!}\right), \quad k_1 + \dots + k_m = k$$

где $\mathbb{E}(\,)$ — матожидание по отношению к $\mathbb{P}$.

($\nu!/(\nu-k)!$ - число способов выбрать k частиц из ν.)

Опр.

Пусть M_k абсолютно непрерывно по отношению к мере Лебега на $A_1^{k_1} \times \dots \times A_m^{k_m}$, т. е. M_k записыв. как

$$M_k\left(A_1^{k_1} \times \dots \times A_m^{k_m}\right) = \int_{A_1^{k_1} \times \dots \times A_1^{k}} R_k(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \dots dx.$$

Тогда R_k — k-точечная корреляционная ф-я.

1) Вместо меры Лебега $dx_1 \dots dx_N$ можно рассматривать любую другую референтную меру.

2) Вероятностная интерпретация:
Пусть $[x_1, x_1+\Delta x_1], \dots, [x_k, \dots, x_k+\Delta x_k]$ – непересек. отрезки

$$R_k(x_1, \dots, x_k) = \lim_{\Delta x_1, \dots, \Delta x_k \to 0} \frac{\mathbb{P}(\text{найти частицу в } [x_k, x_k+\Delta x_k])}{\Delta x_1 \dots \Delta x_k}$$

Если вместо $\mathbb{R}$ дискретное множество, (например $\mathbb{Z}$) то $R_k(x_1, \dots, x_k)$ – вероятность найти частицу в $(x_1, \dots, x_k)$.

В частности одноточечная ф-ия $R_1(x)$ – средняя плотность частиц в точке x

$$\mathbb{E}(\nu(A)) = \int_A R_1(x)dx$$

3) Симметрия относительно перестановок

$$R_k(x_1, \dots, x_k) = R_k(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_k}) \quad \sigma \in S_k$$

Свойства.

1. Лемма. Пусть $\mathbb{P}$ – абсолютно непрерывна и симметрична $d\mathbb{P}(\lambda_1 \dots \lambda_n) = d\mathbb{P}(\lambda_{\sigma_1}, \dots, \lambda_{\sigma_N}) = P(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_N$.

Тогда $$R_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{N!}{(N-k)!} \int dx_{k+1} \dots dx_N \; P(x_1 \dots x_N)$$

Док-во: $R_k(x_1, \dots, x_k)$ _ Вероятность найти любые k собств значений из $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ в точках $x_1, \dots, x_k$.

Один вариант $\lambda_1 = x_1, \dots, \lambda_k = x_k$. Любая другая упорядоченная выборка $\lambda_{\sigma_1} = x_1, \dots, \lambda_{\sigma_k} = x_k$ имеет ту же вероятность. Всего таких выборок $A_N^k = N!/(N-k)!$

Групповые ф-ии: $T_2 = R_1(x_1)R_1(x_2) - R_2(x_1, x_2)$

$$T_3 = 2R_1(x_1)R_1(x_2)R_1(x_3) - R_1(x_1)R_2(x_2, x_3) - R_2(x_1, x_2)R_1(x_3) - R_1(x_2)R_2(x_1, x_3) + R_3(x_1, x_2, x_3)$$

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{S} (-1)^{n-m} (m-1)! \, R_{S_1} \dots R_{S_m}, \quad S = S_1 \sqcup S_2 \sqcup \dots \sqcup S_m = \{1, \dots, n\}, \quad S_i \cap S_j = \varnothing$$

Обратно: $R_n(x_1,\dots x_n)=\sum\limits_m \sum\limits_S (-1)^{n-m} T_{S_1}\dots T_{S_m}$

Пусть $A(z_1, z_2,\dots)$ — формальный ряд по $z_1,\dots,z_n$ и A_S — коэфф. при $z_{i_1}\dots z_{i_k}$ при $S=(i_1,\dots,i_k)\subset S$ $A_\varnothing=0$

и $B(\underline{z})=-\ln(1+A)$. Тогда $T_k(x_{i_1},\dots,x_{i_k})(-1)^k$ — коэфф. при $z_{i_1}\dots z_{i_k}$.

Док-во: Пусть $f(z)=\sum\limits_{m=1}^{\infty} z^m f_m$

$[z_{i_1}\dots z_{i_k}] f(A(\underline{z}))=\sum\limits_{m,S_1,\dots,S_m} m!\, f_m A_{S_1}\dots A_{S_m}$, где $S_1\cup\dots\cup S_m=\{i_1\dots i_k\}$
$S_i\cap S_j=\varnothing$

Возьмем $f(z)=-\ln(1+z)$ $\quad f_m=\frac{(-1)^m}{m}$

$(-1)^n T_n(x_1,\dots,x_m)=\sum(m-1)!\,R_{S_1}\dots R_{S_m}(-1)^m$

Обратно $g(z)=f^{-1}(z)=e^{-z}-1$ $\quad g_m(z)=\frac{(-1)^m}{m!}$

$$R_n(x_1\dots x_n)=\sum(-1)^{n-m}T_{S_1}\dots T_{S_m}\qquad\square$$

Начнем вычислять корр. функции с N-точечной

При $k=N$ имеем

$$R_N(x_1,\dots,x_N)=N!\,P(x_1,\dots,x_N)=\frac{1}{Z}\Delta^2(x_1\dots x_N)\prod_i e^{-V(x_i)}=$$

$$=\det H^{-1}\det P_{m-1}(x_n)\det\tilde{P}_{k-1}(x_e)\prod e^{-V(x_i)}$$

$$=\det\sum_{i,j} P_{i-1}(x_n) H^{-1}_{ij}\tilde{P}_{j-1}(x_m)\, e^{-\frac{V}{2}(x_n)} e^{-\frac{V(x_m)}{2}}$$

$$=\det_{1\le n,m\le N} K(x_n,x_m)$$

$$\boxed{K(x,y) = \sum_{i,j} p_{i-1}(x)\, H^{-1}_{i,j}\, \tilde{p}_{j-1}(y)\, e^{-\frac{V(x)}{2}} e^{-\frac{V(y)}{2}}}$$

Свойства ядра

1) $K(x,y)$ не зависит от выбора p и $\tilde{p}$

2) $\boxed{N = \int K(x,x)} = \sum_{i,j} \langle p_{i-1} | \tilde{p}_{j-1} \rangle H^{-1}_{i,j} = \sum_{i,j} H_{j,i} H^{-1}_{i,j} = \operatorname{Tr} I_N = N$

3) $K * K = K$: - самовоспроизводящее ядро (проектор)

$$\int K(x,y) K(y,z) dy = K(x,z)$$

Теорема: (Дайсон)

$$\int \det_{1 \le i,j \le k} (K(x_i, x_j))\, dx_k = (N-k+1) \det_{1 \le i,j \le k-1} (K(x_i, x_j))$$

$$\sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma \int \prod_{i=1}^{k} K(x_i, x_{\sigma_i})\, dx_k = \sum_{\sigma \in S_{k-1}} (-1)^\sigma \prod_{i=1}^{k-1} K(x_i, x_{\sigma_i}) \int K(x_k, x_k)\, dx_k$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_N : \sigma_k \ne k} (-1)^\sigma \underbrace{K(x_k, x_{i_1}) K(x_{i_1}, x_{i_2}) \ldots K(x_{i_s}, x_k)}_{K(x_{i_1}, x_{i_s}) \text{ - 1 цикл сокращ. на единицу.}} \prod_{\{1,\ldots,k\} \setminus \{i_1, \ldots, i_s, k\}} K(\cdot\,\cdot) \;=$$

$$= N \det_{1 \le i,j \le k-1} K(x_i, x_j) - (k-1) \det_{1 \le i,j \le k-1} K(x_i, x_j)$$

В первое слагаемое вошли перестановки, не переставляющие x_k. Во втором слагаемом x_k входит в один из циклов. В этом случае интегрирование сокращает длину цикла на 1. Поэтому полученная перестановка отличается знаком. Обратно, чтобы получить перестановку k элементов из перестановки $(k-1)$ элементов можно вставить x_k в любой цикл между любой парой x_i, x_j на одно из $(k-1)$ возможных мест.

Следствие: $$\boxed{R_k(x_1,\dots,x_k) = \det\left(K(x_i,x_j)\right)_{1\le i,j\le k}}$$

Расчет средних вида $\mathbb{E}\left(\prod_i (1+f(x_i))\right) =$

$$= \frac{\det H^{-1}}{N!}\int \det P_{i-1}(x_j)\,\det\left(\tilde{P}_{k-1}(x_s)\right)\prod_l (1+f(x_l))\prod_i e^{-V(x_i)}\,dx_i$$

$$= \frac{1}{\det H}\det\left(\langle P_{i-1}|\tilde{P}_{k-1}(1+f)\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{\det H}\det\left(H_{i,k} + \langle P_{i-1}|\tilde{P}_{k-1}f\rangle\right) =$$

$$= \det\left(\delta_{i,j} + \sum_k H^{-1}_{ik}\langle P_{k-1}|\tilde{P}_{j-1}f\rangle\right) \ominus$$

$$A_{i,x} = \sum_k H^{-1}_{ik}P_{k-1}(x) \qquad B_{x,j} = \tilde{P}_{j-1}(x)f(x) \qquad AB = \int A_{i,x}B_{x,j}e^{-V}dx$$

$$BA = \sum_i B_{x,i}A_{i,y}$$

$$\ominus \det(1+AB) = \det(1+BA)$$

$$BA = \sum_{ik}\tilde{P}_{i-1}(x)f(x)\,H^{-1}_{ik}P_{k-1}(y) = f(x)\,K(y,x)$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\prod_i(1+f(x_i))\right) = \det(1+Kf)}$$

Частные случаи: 1) $f(x) = \sum_{r=1}^{k} \delta(x - y_r) z_r$

$$\mathbb{E}\left(\prod_i \delta(x_i - y_r) z_r\right) = \det\left(\mathbb{1} + K \sum_r \delta(x - y_r) z_r\right) = \det\left(\delta_{r,s} + K(y_s, y_r) z_r\right)$$

Коэфф при $z_1 \dots z_r$ равен $\det K(y_r, y_s) = R_n(y_1 \dots y_r)$.

$$T_n (-1)^n = [z_1 \dots z_r] \left(\ln \det(\delta_{r,s} + K(y_s, y_r) z_r\right) =$$

$$= \operatorname{Tr} \ln (1 + K(y_s, y_r) z_r) = -\sum \frac{(-1)^{m-1}}{m} \operatorname{Tr} \left(K_{r,s} z_s\right)^m$$

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in S_n} K(y_{\sigma_1}, y_{\sigma_2}) K(y_{\sigma_2}, y_{\sigma_3}) \dots K(y_{\sigma_n}, y_{\sigma_1})$$

Для $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ $\quad T_2(x,y) = |K(x,y)|^2$

Вероятность образования пустоты: $f = -\mathbb{1}_{x \in J}$

$$E(0, J) := \mathbb{P}(\text{нет частиц в } J) = \det(1 - K \mathbb{1}_J)$$

Плотность вероятности для двух соседних с.з. быть в точках a и b:

$$p(\lambda_i = a, \lambda_{i+1} = b) = -\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} E(0, (a,b))$$

В общем случае $E(n_1, \dots, n_k | J_1, \dots J_k)$ - вероятность

n_1 с.з. в J_1, n_2 в J_2 и т.д.

$$E(n_1 \dots n_k | J_1, \dots, J_k) = \frac{1}{n_1! \dots n_k!} \frac{\partial^{\sum n_i}}{\partial \lambda_1^{n_1} \dots \lambda_k^{n_k}} \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{N}\left(1 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{1}_{J_i}(x_j)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n_1! \dots n_k!} \frac{\partial^{\sum n_i}}{\partial \lambda_1^{n_1} \dots \lambda_k^{n_k}} \left. \det\left(1 + K_N \sum_i \lambda_i \mathbb{1}_{J_i}\right) \right|_{\lambda_1 = \dots = \lambda_k = -1}$$

Пример. Круговой ансамбль.

$$\prod_{i<j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^2 = \prod_{i<j} (e^{-i\theta_i} - e^{-i\theta_j})(e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}) =$$

$$= \det_{\substack{0\le j\le N-1\\ 1\le k\le N}} (e^{ij\theta_k}) \prod_{1\le k\le N} e^{-i\frac{N-1}{2}\theta_k} \prod_{1\le k\le N} e^{i\frac{N-1}{2}\theta_k} \det_{\substack{0\le j\le N-1\\ 1\le k\le N}} (e^{-ij\theta_k}) =$$

$$S_i = \frac{N-1}{2} + i$$

$$= \det(e^{i\theta_k S_j}) \det(e^{-i\theta_k S_j})$$

Построим ядро: $K_N = \sum_{i=0}^{N-1} p_i(x) H^{-1}_{ij} \tilde{p}_j(y)$

$H_{ij} = \langle p_i | \tilde{p}_j \rangle$ Возьмем $p_i(\theta) = e^{i\theta S_i}$ $\tilde{p}_i(\theta) = e^{-i\theta S_i}$

$$H_{ij} = \langle p_i | \tilde{p}_j \rangle = \int e^{i\theta(S_i - S_j)} d\theta = 2\pi \delta_{ij} \Rightarrow H^{-1}_{ij} = \frac{1}{2\pi}\delta_{ij}$$

$$K_N(x,y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(x-y)S_i} = \frac{1}{2\pi}\left(e^{i(x-y)\frac{(1-N)}{2}} + e^{i(x-y)\frac{3-N}{2}} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{i(x-y)\frac{1-N}{2}} \left(\frac{1 - e^{i(x-y)N}}{1 - e^{i(x-y)}} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{(x-y)N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

1) $K(x,x) = \lim\limits_{x\to y} K(x,y) = \frac{N}{2\pi}$ – плотность.

2) Перейдем к пределу $N \to \infty$, $\frac{xN}{2\pi} = \xi$ $yN = \varphi$

$$K_{\sin}(\xi,\varphi) = \frac{2\pi}{N} K\left(\frac{2\pi\xi}{N}, \frac{2\pi\varphi}{N}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\pi(\varphi - \xi))}{\varphi - \xi}$$

3) Групповые ф-ции $T_2 = |K(x,y)|^2 = \frac{1}{\pi^2} \frac{\sin^2 \pi r}{r^2}$

Как понимать $\det(1+K)$?

Детерминант Фредгольма определён для ядерных (trace class) операторов.
Пусть $\mathcal{H}$ - сепарабельное гильбертово пространство.
Ядерный оператор $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ - оператор с конечным следом:

$$\|A\|_1 = \operatorname{tr}|A| = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi_k, \sqrt{A^* A}\, \varphi_k \rangle < \infty$$

Для самосопряжённого оператора $A = A^*$:

$$\|A\| = \operatorname{tr} A = \sum_k \langle \varphi_k, A\varphi_k \rangle = \sum \mu_k \qquad \mu_k \text{ - собств. знач.}$$

Соотношение между нормами: $\|A\| \le \|A\|_2 \le \|A\|_1$

Существ. определителя Фредгольма

$$\det(1+A) = \exp \operatorname{Tr} \ln(1+A) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Tr} A^k}{k}(-1)^{k+1}$$

Теорема Мерсера