Листок 4. Интеграл Фурье и преобразование Фурье

Анализ, 2 курс, **01.04.2017**

4⋄1 **Интеграл Дирихле.** Докажите, что $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. (Указание: воспользоваться тождество $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} dy$ и свести к задачу к нахождению повторного интеграла, который явно вычисляется).

4⋄2 Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и у функции f в некоторой точке $x \in \mathbb{R}$ существует левый и правый пределы $f(x-0)$ и $f(x+0)$, а также имеются левая и правая производные в точке x. Доказать, что

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin At}{t} dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda (t-x) dt. \qquad (1)$$

4⋄3 **Лемма Римана на $\mathbb{R}$.** Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Докажите, что

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin At\, dt = 0.$$

4⋄4 **Принцип локализации для интеграла Фурье.** Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Если функции f и g совпадают в сколь угодно малой окрестности $\mathcal{O}(x_0)$ некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}$, то интегралы Фурье функций f и g (см. (**??**)) в точке x_0 сходятся или расходятся одновременно, причем в случае сходимости они совпадают.

4⋄5 Представьте функцию $f(x)$ в виде интеграла Фурье, если

а) $f(x) = e^{-\alpha|x|},\ \alpha > 0;$ **б)** $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & \text{при} \quad |x| < 1 \\ 0, & \text{при} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$

4⋄6 Посчитайте преобразования Фурье следующих функций:

а) $f(x) = xe^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$; **б)** $f(x) = \frac{d^2}{dx^2}(x^2 e^{-|x|})$; **в)** $f(x) = \frac{1}{x^2+\alpha^2}$.

4⋄7 Что можно сказать про преобразование Фурье функции f, если известно, что функция f 1) четная, 2) нечетная, 3) вещественная, 4) удовлетворяет условию $f(x) = \overline{f(-x)}$?

4⋄8 Восстановить функцию $f(x)$ по ее преобразованию Фурье $F[f](\lambda)$, если

а) $F[f](\lambda) = \frac{1}{a+i\lambda}$; **б)** $F[f](\lambda) = \frac{\sin a\lambda}{\lambda}$ $(a \neq 0)$.

4⋄9 Рассмотрим преобразование Фурье как отображение $f(x) \mapsto F[f](\lambda)$. Проверьте следующие соответствия

а) $f(ax) \mapsto \frac{1}{|a|} F[f]\left(\frac{\lambda}{a}\right)$, $f(x+x_0) \mapsto e^{ix_0\lambda} F[f](\lambda)$,

$$f(x+x_0) \pm f(x-x_0) \mapsto \begin{cases} 2\cos\lambda x_0 F[f](\lambda) \\ 2i\sin\lambda x_0 F[f](\lambda) \end{cases};$$

б) $f(x)e^{\pm i\lambda_0 x} \mapsto F[f](\lambda \pm \lambda_0)$,

$f(x)\cos\lambda_0 x \mapsto \frac{1}{2}\left(F[f](\lambda-\lambda_0) + F[f](\lambda+\lambda_0)\right)$,

$f(x)\sin\lambda_0 x \mapsto \frac{1}{2i}\left(F[f](\lambda-\lambda_0) - F[f](\lambda+\lambda_0)\right)$,

$f(x)\sin^2\frac{\lambda_0 x}{2} \mapsto \frac{1}{4}\left(2F[f](\lambda) - F[f](\lambda+\lambda_0) - F[f](\lambda-\lambda_0)\right)$.

4⋄10 (*) Формула Пуассона. Пусть функция $f(x)$ принадлежит пространству Шварца. Докажите равенство

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} F[f](k)e^{inx}.$$

Указание: левая часть является периодической функцией. Найдите для нее коэффициенты Фурье по ортогональной системе $\{e^{inx}\}$ и убедитесь в равномерной сходимости соответствующего ряда Фурье.

4⋄11 (*) Пусть функция $u = u(x,y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}_+$ принадлежит пространству Шварца по переменной x равномерно по y и является решением следующей задачи в верхней полуплоскости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ x\in\mathbb{R},\ y>0 \quad \text{(уравнение Лапласа)},$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ x\in\mathbb{R} \quad \text{(граничное условие)}.$$

причем $u(x,y) \to 0$ при $y \to +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$.
а) Проверьте, что преобразование Фурье функции $u(x,y)$ по переменной x имеет следующий вид

$$F[u](\lambda) = F[\varphi](\lambda)e^{-|y|\lambda},\ \forall y \geqslant 0.$$

б) С помощью формулы обращения получите формулу для решения рассматриваемой задачи в виде интеграла Пуассона

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\varphi(\xi)d\xi.$$